BASES DE MATEMÁTICAS

APUNTES

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas y de Gestión

ESCET

Alessandra Gallinari

2002

Introducción

En este curso se aborda la disciplina de las matemáticas que tradicionalmente se denomina cálculo o análisis matemático en una variable. El concepto de límite, central en esta asignatura, y que abre todo el campo del cálculo diferencial e integral, supone una revolución en las matemáticas y en cómo éstas describen la realidad: de la noción de velocidad constante a la de velocidad instantánea, del cálculo de áreas de polígonos al de áreas encerradas por curvas, del cálculo de masas de sólidos de densidad constante al mismo cálculo con densidad variable, de la probabilidad de sucesos con una cantidad finita de opciones al estudio de las probabilidades de sucesos donde hay una cantidad infinita de posibilidades, de lo discreto a lo continuo... son algunos ejemplos que ilustran lo señalado. La física, la ingeniería, la estadística se fundamentan (no exclusivamente pero sí de una forma crucial) matemáticamente en los conceptos que se presentarán: límite, función, derivación e integración.

Aunque el mundo de las telecomunicaciones y la informática presenta actualmente un modelo digital, es decir, discreto (este campo de las matemáticas se presenta en la asignatura de Matemática Discreta) no podemos olvidar que la realidad no se adapta completamente a modelos discretos. El área de una circunferencia involucra a ese misterioso número π que no es un número racional y el teorema de Pitágoras nos recuerda que la diagonal de un cuadrado de lado unidad (pensemos en el alerón de un tejado) tampoco es racional. Cuando nos circunscribimos al mundo de los números racionales lo hacemos para perder exactitud (es imposible la cuadratura del círculo, nunca mejor dicho) y eso puede ser trágicamente relevante. Además, el análisis matemático presenta interesantes instrumentos de descripción que son fundamentales en otros campos: por ejemplo el estudio sistemático de las funciones reales es usado para el estudio de la eficiencia de los algoritmos en lo que se denomina complejidad y esto tiene fuertes consecuencias en seguridad informática, gestión de proyectos... .Finalmente la industria y la economía (también la biología, la química, la medicina...) necesitan modelos que describan ciertos procesos (evoluciones de mercado, procesos de fabricación, poblaciones...) y de los que, a priori, se puedan establecer predicciones, se puedan optimizar gastos y recursos (u otras variables), se tomen decisiones adecuadas y seguras... . Normalmente estos estudios no involucran a una sola variable (pensemos en una industria: tiempo, energía, recursos humanos...) y por tanto se necesita también desarrollar un análisis matemático de varias variables que es lo que se enseñará en la asignatura de Cálculo.

Con frecuencia, los problemas matemáticos que se presentan en la ciencia o la tecnología no se pueden resolver con métodos analíticos exactos. No es posible calcular el área de una región si no conocemos una primitiva de la integral que la representa. Así mismo, para calcular el máximo de una función es, en general, necesario poder calcular exactamente las raíces de su función derivada. En un modelo matemático que utiliza ecuaciones differenciales tenemos que poder calcular las soluciones exactas de estats ecuaciones.

Hay varios teoremas que garantizan la existencia de soluciones a estos problemas sin proponer un método efectivo para su cálculo exacto. En estos casos se utilizan *métodos numéricos,* es decir, algoritmos que permiten hallar una solución aproximada. Estos métodos se basan, en general, en la *discretización* del problema y métodos iterativos de aproximación.

Newton, Leibnitz, Cauchy, Euler, Gauss... son algunos de los insignes matemáticos que han desarrollado una de las obras intelectuales fundamentales para la ciencia y la tecnología actuales.

El contenido de esta publicación es un guión de la asignatura de Bases de Matemáticas para las titulaciones de Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas y de Gestión de la Escuela Superior de Ciencias Experimentales y Tecnología (ESCET).

Con estas notas de clase se intenta presentar de forma organizada el material que se expondrá en las clases teóricas. Por la naturaleza de estos apuntes, la exposición no es completa y es fundamental que el alumno consulte también los libros recomendados en la bibliografía relativa a la asignatura.

Estas notas vienen acompañadas por un libro de problemas resueltos de forma tradicional y un libro de problemas resueltos utilizando el sistema de computación simbólica Maple V, donde se podrán apreciar mayormente las aplicaciones de las técnicas y de los resultados expuestos en clase.

El capítulo 1 es un breve repaso de nociones básicas de lógica y técnicas de demostración de teoremas, temas que se desarrollan con más detalle en la asignatura paralela de Matemática Discreta.

En el capítulo 2, a partir de las operaciones básicas entre conjuntos y la noción de relación binaria, se define el concepto de función entre dos conjuntos arbitrarios y se estudian sus propiedades generales. En particular se tratan las funciones que tienen inversa. También se definen las relaciones de equivalencia y de orden que se utilizarán en los siguientes capítulos. El apéndice al final de estos apuntes contiene un breve repaso de las funciones elementales y sus propiedades que se suponen estudiadas por el alumno en cursos anteriores.

Todas estas nociones son básicas y aparecen en prácticamente todas las asignaturas de la titulación. En particular, vendrán empleadas en la asignaturas de Matemática Discreta, Cálculo y Álgebra.

En el capítulo 3 se dará una descripción de la estructura algebraica de cuerpo (estructura que se estudiará en más detalle en la asignatura de Álgebra) del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, de sus propiedades de orden y de completitud. Estas propiedades son fundamentales para poder comprender el concepto de distancia en $\mathbb{R}$ y de límite de una función real. Las aplicaciones de estos conceptos serán los temas principales del cálculo en una variable.

El capítulo 4 está dedicado a los números complejos. Se trata de un breve repaso de las propiedades básicas de estos números. Los aspectos numéricos son el contenido de la práctica correspondiente con Maple V de esta asignatura.

Los capítulos 5, 6 y 7 tratan los conceptos de límite de sucesiones y funciones reales y de continuidad. Se exponen los teoremas fundamentales de convergencia y divergencia. Los métodos numéricos correspondientes vienen presentados en las prácticas correspondientes con Maple V de esta asignatura. En estos apuntes se presta particular atención al tema de las sucesiones reales como introducción a la resolución de ecuaciones en diferencias que los alumnos estudiarán durante la asignatura de Álgebra, y a la teoría de las series desarrollada en la asignatura de Cálculo. Los alumnos pueden utilizar los resultados de estos capítulos para el estudio de la convergencia y complejidad de los algorítmos presentados en la asignatura paralela de Matemática Discreta.

Los siguientes dos capítulos (8 y 9) introducen el cálculo diferencial y sus aplicaciones clásicas. El 10 trata del cálculo integral y de técnicas básicas de integración. Todos estos conceptos y sus aplicaciones vienen ilustrados en las prácticas correspondientes con Maple V.

Los métodos númericos relacionados ad estos temas se profundizarán en la asignatura de Cálculo.

Esta publicación es, en su mayoría, una adaptación del material contenido (unas veces sin modificarlo, otras proponiendo variaciones de ello) en la bibliografía incluida.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Roberto Muñoz por su indispensable participación en la corrección de estas notas.

Gracias también al profesor Ariel Sánchez por su sugerencias y a los alumnos que han señalado erratas y errores en versiones previas.

Índice General

Capítulo 1

Nociones de lógica y demostraciones

Las ciencias experimentales se basan en la observación de la naturaleza y utilizan un razonamiento de tipo *inductivo* para poder formular teorías generales que permitan entender y clasificar los resultados de observaciones particulares y hacer predicciones sobre futuros experimentos.

Ejemplo de razonamiento inductivo
Durante el primer día de clases en nuestra universidad se observa que:

- en las aulas 204 y 207 hay más alumnos varones que mujeres,
- en la biblioteca hay más alumnos varones que mujeres

Por tanto, se deduce que en nuestra universidad la población masculina es predominante, pero no tenemos la certeza que nuestra conclusión sea verdadera.

Las matemáticas son una ciencia *deductiva.* La investigación matemática se basa en un modelo matemático de la realidad constituido por objetos rigurosamente definidos por medio de axiomas y utiliza las leyes de la lógica formal para sacar conclusiones que sean verdaderas en el modelo considerado.

Ejemplo de razonamiento deductivo
Sea A el conjunto de todos los alumnos oficialmente matriculados en nuestra universidad. Sea v el número de elementos de A que son varones y m el correspondiente número de elementos de A que son mujeres.

Teorema 1.0.1 $v > m$

Demostración De las listas oficiales del Rectorado sabemos que $v = 3500$ y que $m = 1500$. Por tanto, se sigue que $v > m$. $\square$

El razonamiento matemático necesita afirmar con certeza si una sentencia es verdadera o falsa.

La **Lógica** es la disciplina que se ocupa del estudio sistemático de las condiciones generales de validez y de la formalización de razonamientos o deducciones.

En lo que sigue se pretende recordar sólo algunas nociones de *lógica proposicional* y de *lógica de predicados* que nos harán falta en los siguientes capítulos. Los alumnos estudiarán estos conceptos en más detalle como primer tema de la asignatura paralela Matemática Discreta.

Una **proposición** es una sentencia que se puede clasificar como verdadera o falsa sin ambigüedad.

En nuestra notación, las **constantes** son los elementos de un conjunto U, que será nuestro **universo** de discurso y las **variables** son objetos genéricos, que podrán sustituirse por elementos de U.

Un **predicado o función proposicional** es una sentencia que involucra variables de modo que al ser sustituidas por constantes de un universo U se convierte en una proposición.

Nota importante: al fin de simplificar la exposición, trabajaremos siempre en un universo predeterminado (los números naturales, enteros, racionales, reales, complejos,...). Esta limitación nos permitirá prescindir de algunas definiciones y estructuras lógicas fundamentales, cuales las tautologías, las formas proposicionales y las formas de predicados.

Ejemplo 1.0.2 *La sentencia "existe x tal que $x^2 = 2$" es verdadera si nuestro contexto son los números reales ($x = \sqrt{2}$ o $x = -\sqrt{2}$) y falsa si nuestro contexto son los números naturales.*

Ejemplos 1.0.3 *1) En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, $2 + 2 = 4$.*

2) En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, $2 \cdot 3 = -6$.

3) Este enunciado es falso.

4) En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, $0 = 0$.

5) En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, $0 \neq 0$.

1) Es una proposición verdadera.
2) Es una proposición falsa.
3) No es una proposición.
4) Es una proposición verdadera.
5) Es una proposición falsa.

1.1 Conectivos lógicos y tablas de verdad

Si P y Q son dos proposiciones, es posible crear nuevas proposiciones por medio de los siguientes conectivos lógicos:

- la **negación** de P es la proposición

  noP (ó $\neg P$) que es falsa cuando P es verdadera y verdadera cuando P es falsa. Su **tabla de verdad** es

P	$\neg P$
V	F
F	V

- la **conjunción** de P y Q es la proposición

  $P \wedge Q$ que es verdadera si y sólo si P y Q son verdaderas.

  Su **tabla de verdad** es

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- la **disyunción** de P y Q es la proposición

  $P \vee Q$ que es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones P y Q es verdaderas.

  Su **tabla de verdad** es

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- la **implicación** es la proposición

  $P \Rightarrow Q$ que es siempre verdadera salvo si P es verdadera y Q es falsa.

  P se llama la **hipótesis** y Q la **conclusión**.

  Su **tabla de verdad** es

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- la **doble implicación** es la proposición

  $P \Leftrightarrow Q$ definida como $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

  Su **tabla de verdad** es

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejemplo 1.1.1 *En el contexto de los números naturales, sean P :"n es par" y Q : "existe un número natural m tal que $n = 2m$." Entonces $P \Leftrightarrow Q$ es verdadera precisamente cuando P y Q son ambas verdaderas o ambas falsas.*

Definición 1.1.2 *Dos proposiciónes P y Q son **equivalentes en sentido lógico** (y se escribirá $P \equiv Q$) si tienen la misma tabla de verdad, es decir, si $P \Leftrightarrow Q$ es siempre verdadera.*

Ejercicios 1.1.1 *Sean P y Q dos proposiciones.*
*1)Verificar que valen las **Leyes de De Morgan**:*

- $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

2)Verificar que $(P \Rightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q) \equiv ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$. Pensad, por ejemplo, en P :"estoy en Roma" y Q : "estoy en Italia."
*3) Verificar el **principio de doble negación**:*

$$\neg(\neg P) \equiv P. \tag{1.1}$$

1.2 Los cuantificadores "∀" y "∃"

Por definición, un predicado se convierte en una proposición al sustituir sus variables por constantes de un universo U.

Otra forma de convertir predicados en proposiciones es el uso de los siguientes **cuantificadores**:

- el **cuantificador universal** $\forall$ (para todo) y
- el **cuantificador existencial** $\exists$ (existe).

Si $P(x)$ es un predicado y U es nuestro universo, la expresión

$$\forall x \in U\, P(x)$$

representa la frase *para todo x en U, $P(x)$ es verdadera* y la expresión

$$\exists x \in U\, P(x)$$

representa la frase *existe x en U tal que $P(x)$ es verdadera.*

Ejemplos 1.2.1 *1) La proposición (verdadera) "para todo número real no negativo x existe un número real y tal que (t.q.) $y^2 = x$," se escribe como*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \exists y \in \mathbb{R} \quad t.q. \quad y^2 = x.$$

2) La proposición (falsa) "existe un número real y tal que para todo número real no negativo x, $y^2 = x$," se escribe como

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad y^2 = x.$$

Entonces, si se invierte el orden de los dos cuantificadores $\forall$ y $\exists$ se puede pasar de una proposición verdadera a una falsa.

1.3 Negación de una proposición que contenga cuantificadores

- Para demostrar que la proposición "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$" es falsa hay que presentar un solo **contraejemplo** ($x = 2$), es decir

$$\neg((\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = 1)) \quad \text{es} \quad (\exists x \in \mathbb{R})(\neg(x^2 = 1)).$$

- Para demostrar que la proposición "$\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $x^2 = -1$" es falsa hay que demostrar que ningún número real x es tal que $(x^2 = -1)$, es decir

$$\neg((\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -1)) \quad \text{es} \quad (\forall x \in \mathbb{R})(\neg(x^2 = -1)).$$

Teoremas y demostraciones directas e indirectas

Un **axioma** es una proposición que se considera verdadera sin demostrarla.

A partir de axiomas y proposiciones verdaderas, se pueden utilizar las leyes de la lógica (los "razonamientos válidos") para demostrar que una nueva proposición es también verdadera.

Un **teorema** es una proposición verdadera del tipo "$P \Rightarrow Q$," donde P y Q son dos proposiciones.

Un **lema** es un teorema que se utiliza para demostrar otro teorema y un **corolario** es un teorema que es una consecuencia directa de otro teorema previamente demostrado.

Los siguientes son algunos ejemplos donde se utilizan las principales técnicas de demostración.

Ejemplo 1.3.1 ***Teorema 1.3.2*** *El cuadrado de un entero impar es también un entero impar.*

Utilizaremos las siguientes proposiciones:

$$\begin{aligned} P &: n \textit{ es un entero impar} \\ R_1 &: n = 2k+1 \quad \textit{para cierto } k \textit{ entero} \\ Q &: n \textit{ es un entero impar y } n^2 \textit{ es impar.} \end{aligned}$$

Una **demostración directa** de un teorema de la forma "$P \Rightarrow Q$" consiste en una cadena de proposiciones verdaderas $P, R_1, R_2, \cdots, R_m, Q$ tal que

$$P \Rightarrow R_1, R_1 \Rightarrow R_2, \cdots, R_m \Rightarrow Q.$$

Demostración directa del teorema (1.3.2):

$$\begin{aligned} &P \Rightarrow R_1 \\ R_2 &: n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ R_3 &: n^2 = 2(2k+2k) + 1 \\ R_4 &: n^2 = 2j + 1 \quad \text{para un cierto } j \text{ entero} \\ &R_4 \Rightarrow Q. \end{aligned}$$

Entonces $P \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_2 \Rightarrow R_3 \Rightarrow R_4 \Rightarrow Q$. $\square$

Dos tipos de **demostraciones indirectas** son las demostraciones por contrapositivo y las demostraciones por reducción al absurdo (o contradicción).

En una **demostración por contrapositivo** se utiliza la equivalencia lógica entre "$P \Rightarrow Q$" y "$\neg Q \Rightarrow \neg P$."

Ejemplo 1.3.3 ***Teorema 1.3.4*** *Sea* $a \geq 0$ *un número real. Si para todo* $\epsilon > 0$ *se tiene* $0 \leq a < \epsilon$, *entonces* $a = 0$.

Demostración por contrapositivo del teorema (1.3.4): en este caso el contexto son los números reales no negativos. $P : (\forall \epsilon > 0)(0 \leq a < \epsilon)$ y $Q : a = 0$. Entonces tenemos que demostrar que si $a > 0$ (es decir, si $\neg Q$ es verdadera) se sigue que $(\exists \epsilon > 0)(0 < \epsilon \leq a)$ (es decir, $\neg P$ es verdadera). Sea $R_1 : 0 < \epsilon = \frac{a}{2} < a$. Se verifica que $\neg Q \Rightarrow R_1 \Rightarrow \neg P$. $\square$

En una **demostración por reducción al absurdo** se utiliza el hecho de que si C es una contradicción (una proposición siempre falsa), entonces las proposiciones "$P \Rightarrow Q$" y "$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow C$" son equivalentes en sentido lógico.

Ejercicio 1.3.1 *Comprobar que* $(P \Rightarrow Q) \equiv ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow C)$.

Ejemplo 1.3.5 ***Teorema 1.3.6*** *Sea* a *un número real. Si* $a > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} > 0$.

Demostración por reducción al absurdo del teorema (1.3.6): esta vez el contexto son los números reales, $P : a > 0$ y $Q : \frac{1}{a} > 0$. Nos hace falta verificar que si $(P \wedge (\neg Q)) : a > 0$ y $\frac{1}{a} \leq 0$ es verdadera, entonces se obtiene una contradicción. Sean $R_1 : a \cdot \frac{1}{a} \leq 0$ y $C : 1 = a \cdot \frac{1}{a} \leq 0$. El resultado se sigue de la cadena $P \wedge (\neg Q) \Rightarrow R_1 \Rightarrow C$. $\square$

1.4 Inducción matemática

El método de demostración por inducción matemática se aplica cuando se quiere demostrar que una proposición $P(n)$, que depende del número natural n, es verdadera para todo n. Por ejemplo, una de las siguientes fórmulas:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \leq (n+1)!$,
  donde $(n+1)! = (n+1)\ (n)\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1$

Este método utiliza la propiedad del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales conocida como **Principio de inducción matemática:**

Teorema 1.4.1 *(Principio de inducción matemática) Si A es un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que*
1) $1 \in A$ *y*
2) $(n \in A) \Rightarrow (n+1 \in A)$,
entonces $A = \mathbb{N}$.

Proposición 1.4.2 *(**Razonamiento por inducción**) Sea $P(n)$ una proposición tal que se pueda probar que*
*1) **base de inducción:** $P(1)$ es verdadera*
y que
*2) **paso de inducción:** $P(n)$ verdadera $\Rightarrow P(n+1)$ verdadera,*
entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es verdadera.

La demostración de la proposición (1.4.2) se sigue aplicando el principio de inducción al conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es verdadera}\}$.

Ejemplo 1.4.3 *Demostración por inducción de*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \leq (n+1)!.$$

Base de inducción: si $n = 1$, $P(1)$ $(2 \leq 2)$ es verdadera.
Paso de inducción: si $2^n \leq (n+1)!$ ($P(n)$ es verdadera), entonces

$$2^{n+1} = 2\ 2^n \leq 2\ (n+1)! \leq (n+2)\ (n+1)! = (n+2)!.$$

El resultado se sigue de la proposición (1.4.2).

Veremos más ejemplos de demostraciones en los siguientes capítulos.

Capítulo 2

Conjuntos, relaciones y funciones

Este capítulo es un repaso de nociones de teoría de conjunto y de las definiciones básicas de relaciones, funciones y sus propiedades.
(Referencias: R. Criado, A. Burjosa, C. Vegas, R. Banerjee, *Fundamentos matemáticos I,* Ed. Centro de estudios Ramón Areces. Madrid, 1998 y
P.H. Halmos, *Naive Set Theory,* Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1987.)

La lógica y la teoría de conjuntos están estrechamente relacionadas. De hecho en un principio se pensó que toda propiedad $P(x)$ llevaba asociado un "conjunto", $\{x : P(x)\}$, formado por los elementos a del universo de discurso que satisfacen dicha propiedad, es decir, tales que $P(a)$ es verdadera. Más concretamente, se aceptaba que toda propiedad $P(x)$ divide el universo de discurso en dos partes: la formada por los objetos a que la satisfacen, $a \in \{x : P(x)\}$, y la formada por los objetos a que no la satisfacen, $a \notin \{x : P(x)\}$.

En 1903 Bertrand Russell propuso el ejemplo de "conjunto" $A = \{x : x \notin x\}$ y preguntó si $A \in A$.

De la definición de A se sigue que

$$(A \in A) \Rightarrow (A \notin A) \quad \text{y} \quad (A \notin A) \Rightarrow (A \in A),$$

es decir, $(A \in A) \Leftrightarrow (A \notin A)$.

La conclusión es que no toda propiedad determina un conjunto, hace falta restringir la clase de propiedades que definen conjuntos.

La primera de las restricciones es el *axioma de especificación:* una propiedad por sí sola no determina un conjunto, sino que selecciona elementos de un conjunto dado al que es necesario referirse.

Para no incurrir en contradicción con el axioma de especificación, es necesario asumir la no existencia del "conjunto universal U," el conjunto de todos los conjuntos. Si U fuera un conjunto, también $A = \{x \in U : x \notin A\}$ sería un conjunto.

En respuesta a la paradoja de Russel, se propusieron varias formulaciones axiomáticas de la teoría de conjuntos.

En nuestra exposición, utilizaremos reglas de construcción de conjuntos formuladas en términos de la lógica de predicados a partir de los conceptos primitivos de conjunto y pertenencia (Zermelo-Fraenkel,1922).

Durante las primeras prácticas de laboratorio informático con el sistema Maple V de esta asignatura y de la asignatura Matemática Discreta, los alumnos aprenderán cómo definir y operar con conjuntos y funciones. Además, habrá una práctica de la asignatura Matemática Discreta dedicada a las relaciones, donde se explicará como representarlas y estudiar sus propiedades utilizando Maple V.

En la apéndice A se puede encontrar un resumen de las funciones elementales y sus propiedades.

2.1 Nociones de teoría de conjuntos

Los conceptos de **conjunto** y de **pertenencia** de un elemento a un conjunto son conceptos *primitivos,* es decir, no se definen.

Diremos que un **conjunto** A es una colección (familia, clase), finita o infinita, de objetos de un universo U tal que para todo objeto x se pueda determinar si x pertenece a A. Los objetos de un conjunto serán sus **elementos.** Si x pertenece al conjunto A, se escribirá $x \in A$. Si x no pertenece a A, se escribirá $x \notin A$.

Ejemplos 2.1.1

$$\mathbb{N} := \{1, 2, \cdots\} \quad \textit{es el conjunto de los números naturales}$$

$$\mathbb{Z} := \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\} \quad \textit{es el conjunto de los números enteros}$$

$$\mathbb{F} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \quad y \quad q \neq 0\} \quad \textit{es el conjunto de las fracciones de números enteros}$$

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\} \quad \textit{es el conjunto solución de la ecuación } x^2 - 1 = 0$$

Notación: los símbolos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotarán, respectivamente, el conjunto de los números racionales, reales y complejos.

2.1.1 Inclusión e igualdad de conjuntos

Si todo elemento x de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, se dirá que A está contenido en B o que A es un **subconjunto** de B (y se escribirá $A \subseteq B$ ó $B \supseteq A$).

Si A es un subconjunto de B y existe un elemento de B que no partenece a A, entonces A es un **subconjunto propio** de $B:\ A \subsetneq B \quad$ ó $\quad A \subset B$.

Dos conjuntos A y B son **iguales** si contienen los mismos elementos. (Por ejemplo, los conjuntos $A = \{-2, 1, 0, -7\}$ y $B = \{-7, 1, 0, -2\}$ son iguales.)

Nota importante: para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales, es necesario verificar las dos siguientes condiciones:

$$1) A \subseteq B \tag{2.1}$$

$$2) B \subseteq A \tag{2.2}$$

Ejemplos 2.1.2 *1) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = 0\} \quad y \quad B = \{-2, 1\}$. Los elementos de A son las soluciones de la ecuación $x^2+x-2 = 0$, es decir, son los números $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$. Ya que $x_1 \in B$ y $x_2 \in B$, $A \subseteq B$. Ahora está claro que también $B \subseteq A$. Por tanto, $A = B$.*

2) Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, a, d, b\}$, entonces $A = B$.

El **conjunto vacío** $\emptyset$ es el conjunto que no tiene elementos.

Nota: el conjunto $\emptyset$ **no es igual** al conjunto $A = \{\emptyset\}$, pués A tiene un elemento, el conjunto vacío.

Ejemplo 2.1.3 *Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$. Entonces $A = \emptyset$.*

Proposición 2.1.4 *Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $\emptyset \subseteq A$.*

2.1.2 Operaciones con conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, es posible construir nuevos conjuntos por medio de las siguientes operaciones:

- la **unión** de A y B es el conjunto $A \cup B$ de todos los elementos de A o de B, es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B\}$$

- la **intersección** de A y B es el conjunto $A \cap B$ de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B, es decir
$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$$
Si A y B no tienen elementos en común, entonces $A \cap B = \emptyset$ y se dirá que A y B son **disjuntos**

- el **complemento (relativo) de** B **respecto de** A es el conjunto $A \backslash B$ de todos los elementos de A que no pertenecen a B, es decir
$$A \backslash B = \{x : x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}$$

Ejercicio 2.1.1 *Sean* $A = \{-1, 0, 3, 7\}$ *y* $B = \{-3, -1, 0, 3, 5, 7, 8\}$. *Determinar* $A \cup B$, $A \cap B$ *y* $A \backslash B$.

- el **producto cartesiano** de dos conjuntos *no vacíos* A y B es el conjunto de todos pares *ordenados* (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, es decir
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$$

Para representar gráficamente un produco cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos, se puede utilizar un sistema de ejes. Los elementos de A se representan por medio de puntos del eje de las abscisas y los elementos de B por medio de puntos del eje de las ordenadas. Entonces los elementos de $A \times B$ son todos los puntos de "coordenadas" (a, b).
Por ejemplo, sean $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{a, b\}$. La figura 2.1 es una representación gráfica (obtenida con Maple V sustituiendo las letras por números: $x = 1, y = 2, z = 3, a = 1, b = 2$) de $A \times B$.

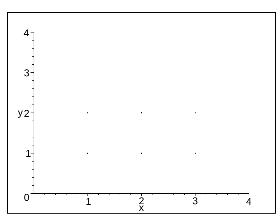

Figura 2.1: Gráfica de $A \times B$.

Ejercicio 2.1.2 *Sean* $A = \{-1, 0, 3, 7\}$ *y* $B = \{-1, 1\}$. *Determinar y representar gráficamente el conjunto* $A \times B$.

2.1.3 Partes de un conjunto y propiedades de las operaciones con conjuntos

Si A es un conjunto, se llama **conjunto de las partes de A,** $P(A)$, al nuevo conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos de A.

Nota: Para todo conjunto A, $P(A)$ es siempre no vacío, ya que $\emptyset \in P(A)$.

Ejemplo 2.1.5 *Sea* $A = \{a, b, c\}$. *Entonces*

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Sean A, B y C tres conjuntos. Las principales propiedades de las operaciones con conjuntos son las siguientes:

1) **idempotencia** de la unión y de la intersección:

$$A \cup A = A \tag{2.3}$$
$$A \cap A = A \tag{2.4}$$

2) **conmutatividad** de la unión y de la intersección:

$$A \cup B = B \cup A \tag{2.5}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{2.6}$$

3) **asociatividad** de la unión y de la intersección:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{2.7}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{2.8}$$

4) **distributividad** de la unión respecto de la intersección y de la intersección respecto de la unión:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2.9}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2.10}$$

5)

$$A \cup \emptyset = A \tag{2.11}$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{2.12}$$

6) **Leyes de De Morgan** (para conjuntos):

$$C\backslash(A\cup B) = (C\backslash A)\cap(C\backslash B) \tag{2.13}$$
$$C\backslash(A\cap B) = (C\backslash A)\cup(C\backslash B) \tag{2.14}$$

7)

$$(A\backslash B)\cup B = A\cup B \tag{2.15}$$
$$(A\backslash B)\cap B = \emptyset \tag{2.16}$$
$$A\backslash(A\backslash B) = A\cap B \tag{2.17}$$

Ejercicio 2.1.3 *Demostrar las propiedades enunciadas en el punto 7).*

Unión e intersección de una familia arbitraria de conjuntos.

Las definiciones de unión y de intersección de dos conjuntos se pueden extender a una familia arbitraria de conjuntos. Si J es un conjunto fijado y asociamos a cada $j\in J$ un conjunto A_j, entonces obtenemos la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in J}$.

La unión de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$ es el nuevo conjunto

$$A = \bigcup_{j\in J} A_j$$

tal que x es un elemento de A si x es un elemento de al menos uno de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$.

La intersección de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$ es el nuevo conjunto

$$A = \bigcap_{j\in J} A_j$$

tal que x es un elemento de A si x es un elemento de todos los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j\in J}$.

Ejemplo 2.1.6 *Si* $J=\mathbb{N}$ *y* $\forall n\in\mathbb{N}$ *definimos* $\mathbb{N}_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$, *entonces* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}_n=\mathbb{N}$ *y* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}_n=\{1\}$.

2.1.4 Cardinal de un conjunto

El **cardinal** de un conjunto finito A, $Card(A)$, es el número de elementos de A. Si A es un conjunto infinito se escribirá $Card(A) = \infty$.

Sean A y B dos conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} Card(A \cup B) = \quad & Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) \leq \\ & \leq Card(A) + Card(B) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

Observación: Se puede comprobar que si A es un conjunto finito, $Card(A) = n \Rightarrow Card(P(A)) = 2^n$.

Ejemplos 2.1.7 *1)* $Card(\mathbb{N}) = \infty$

2) Sean $A = \{-2, 0, 3, 17\}$ *y* $B = \{-7, 0, 5, 17, 18\}$. *Entonces,* $A \cup B = \{-7, -2, 0, 3, 5, 17, 18\}$ *y* $A \cap B = \{0, 17\}$. *Se sigue que*

$$7 = Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 4 + 5 - 2.$$

En el capítulo 3 volveremos a hablar de cardinal de un conjunto en más detalle.

2.2 Relaciones binarias

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición 2.2.1 *Una **relación binaria** entre A y B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$ se dirá que a y b están relacionados y se escribirá aRb.*

Ejemplo 2.2.2 *Sean* $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ *y* $R = \{(a, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$. *Entonces* aRd, bRe, cRd *y* cRe. *(Ver figura 2.2)*

Si $R \subseteq A \times A$ (es decir, si $A = B$), se dirá que R es una **relación binaria en A**.

Ejercicio 2.2.1 *Sean* $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (b, a), (c, b), (c, c)\}$. *Entonces* aRa, bRa, cRb *y* cRc. *Representar gráficamente la relación R.*

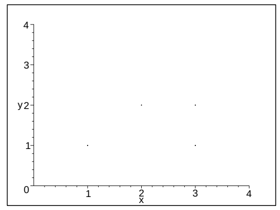

Figura 2.2: Gráfica de R.

Ejercicio 2.2.2 *En base a la siguiente Tabla 1, describir las relaciones en el conjunto* $A = \{$*Andrea, Beatriz, Carlos, Davide, Edward* $\}$:

1) $xR_1y \Leftrightarrow x$ *e* y *viven en el mismo país.*

2) $xR_2y \Leftrightarrow x$ *e* y *tienen el mismo número de teléfono o la misma edad.*

3) $xR_3y \Leftrightarrow x$ *e* y *tienen la misma altura y son europeos.*

Tabla 1	*Edad*	*Tel.*	*País*	*Altura*	*Ocupación*
Andrea	*21*	*43-6950-555-0001*	*Alemania*	*1,75*	*Informática*
Beatriz	*18*	*34-91-555-0000*	*España*	*1,68*	*Estudiante*
Carlos	*37*	*34-91-555-0000*	*España*	*1,75*	*Profesor*
Davide	*18*	*39-06-555-0002*	*Italia*	*1,65*	*Estudiante*
Edward	*21*	*1-215-555-0003*	*EEUU*	*1,68*	*Profesor*

Una relación R en un conjunto no vacío A puede ser:

- R1) **reflexiva:** $\forall x \in A \quad xRx$
- R2) **simétrica:** $\forall x, y \in A \quad xRy \Rightarrow yRx$
- R3) **antisimétrica:** $\forall x, y \in A \quad xRy$ e $yRx \Rightarrow x = y$
- R4) **transitiva:** $\forall x, y, z \in A \quad xRy$ e $yRz \Rightarrow xRz$

Ejercicio 2.2.3 *Interpretar gráficamente las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.*

Observación 1 *Las únicas relaciones binarias en un conjunto no vacío* A *que sean al mismo tiempo simétricas y antisimétricas son tales que* $R \subseteq \{(x, y) : x = y\}$.

Ejemplos 2.2.3 *1) Sea A el conjunto de las personas y $R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ es el padre de } b\}$. Esta relación no tiene ninguna de las propiedades $R1, R2$ y $R4$.*

2) En el conjunto de las partes $P(A)$ de un conjunto A, la relación de inclusión $R = \{(B, C) \in P(A) \times P(A) : B \subseteq C\}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

3) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, la relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

4) En el conjunto de las rectas del plano real, la relación "r es ortogonal a s" no es reflexiva, es simétrica y no es transitiva.

Definición 2.2.4 *Si $R \subseteq A \times B$ es una relación binaria, se denomina*

- ***dominio*** *de R al conjunto*

$$dom(R) = \{x \in A : \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq A$$

- ***imagen directa (o rango)*** *de R al conjunto*

$$Im(R) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq B$$

- ***imagen inversa (o recíproca)*** *de un subconjunto C de B al conjunto*

$$R^{-1}(C) = \{x \in A : \exists y \in C \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq A$$

- ***codominio*** *de R al conjunto B.*

Ejercicio 2.2.4 *Determinar dominio e imagen de las relaciones definidas en los ejemplos (2.2.2) y (2.2.3).*

2.2.1 Relaciones de equivalencia

Definición 2.2.5 *Una relación binaria R en un conjunto no vacío A se denomina* ***relación de equivalencia*** *si es reflexiva, simétrica y transitiva. Si R es una relación de equivalencia en A y $a, b \in A$ son tales que aRb, se escribirá $a \sim b$.*

Si $a \in A$ y $\sim$ es una relación de equivalencia en A, se puede definir un subconjunto $C(a)$ de A denominado **clase de equivalencia de** a :

$$C(a) = \{x \in A : x \sim a\}. \tag{2.19}$$

Notar que $C(a)$ no es vacío ya que toda relación de equivalencia es reflexiva.

Sea b otro elemento de A. Puede ocurrir sólo una de las siguientes situaciones:

$$\text{si } a \sim b, \text{ entonces } C(a) = C(b), \tag{2.20}$$

$$\text{si } a \nsim b, \text{ entonces } C(a) \cap C(b) = \emptyset. \tag{2.21}$$

Por tanto, si consideramos el conjunto de las *distintas* clases de equivalencias, este conjunto representa una *partición* de todo A entre subconjuntos disjuntos y se denomina *conjunto cociente.*

Ejemplos 2.2.6 *1) La relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$, es una relación de equivalencia y $\mathbb{Z} = C(0) \cup C(1)$. $C(0)$ es el conjunto de todos los enteros pares y $C(1)$ de los enteros impares.*

2) En el conjunto de las rectas del plano real, la relación "r es paralela a s" es una relación de equivalencia. Para toda recta r, $C(r)$ representa a la ***dirección*** *determinada por r.*

3) ***Números racionales***
En el conjunto $\mathbb{F}$ de las fracciones $\mathbb{F} := \{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \quad y \quad q \neq 0\}$, para todo par de fracciones $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ y $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$, se define la relación de equivalencia R como $r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$. El conjunto de las clases de equivalencia es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Ejercicio 2.2.5 *Utilizando la Tabla 1 del ejercicio (2.2.2), definir una relación de equivalencia en A y determinar las relativas clases de equivalencia.*

2.2.2 Relaciones de orden

Definición 2.2.7 *Una relación R en un conjunto (no vacío) A es una* ***relación de orden*** *si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si R es una relación de orden en A y $x, y \in A$ son tales que xRy, se escribirá $x \leq y$.*

Una relación de orden R sobre A tal que cada dos elementos x e y de A se pueden comparar (es decir, $\forall x, y \in A$, xRy ó yRx) es una **relación de orden total.** Si una relación de orden R no es de orden total, entonces es una **relación de orden parcial.**

Ejemplos 2.2.8 *1) En el conjunto de los números reales la relación “menor o igual que” ($\leq$) es una relación de orden total. En particular, sea* $A := \{1, 2, 3, 4, 12\}$. *El orden del conjunto A dato por $\leq$ se puede representar con un grafo orientado:*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow 12$$

2) En el conjunto de las partes de un conjunto A, la relación de inclusión ($\subseteq$) es una relación de orden parcial.

3) En el conjunto de los números naturales la relación “ser divisor de”, $|$, es una relación de orden parcial. En particular, para el mismo conjunto $A := \{1, 2, 3, 4, 12\}$ *del ejercicio 1), la relación $|$ se puede representar por medio del siguiente grafo:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 3 & & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & \\ 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 12 \end{array}$$

Ejercicios 2.2.1 *1) Dibujar el grafo de la relación de orden parcial $\subseteq$ en $P(A)$, donde $A := \{a, b, c\}$.*

2) Dibujar el grafo de la relación de orden parcial $|$ en el conjunto $B := \{2, 4, 5, 8, 15, 45, 60\}$.

A toda relación de orden “$\leq$” en A se le puede asociar una **relación de orden estricto,** definida por

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \quad \text{y} \quad x \neq y. \tag{2.22}$$

La relación $<$ es tal que

i) no existen elementos $x, y \in A$ tales que $x < y$ e $y < x$ simultáneamente,

ii) es transitiva.

Viceversa, a partir de una relación R en A que cumple las condiciones i y ii, se puede definir la relación de orden

$$x \leq y \Leftrightarrow (x < y \quad \text{ó} \quad x = y).$$

Son muy importantes las **relaciones de orden estricto y total,** es decir, las relaciones que satisfacen las siguientes dos propiedades:

- **transitiva:** $\forall x, y, z \in A, \quad x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$
- **de tricotomía:** $\forall x, y \in A$, se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:
$$x = y, \quad x < y, \quad y < x.$$

Ejemplos 2.2.9 *1) En el conjunto de los números reales la relación "menor que" es una relación de orden estricto y total.*

2) En el conjunto de las partes de un conjunto A, la relación de inclusión propia (es decir, $\forall B, C \in P(A),\ B < C$ si $B \subseteq C$ y $B \neq C$) es una relación de orden estricto parcial.

2.2.3 Mínimos y máximos de un conjunto

Definición 2.2.10 *Si $\leq$ es una relación de orden en un conjunto A y $B \subseteq A$, un elemento $m \in B$ es **un mínimo** de B si $\forall x \in B \quad m \leq x$. Un elemento $M \in B$ es **un máximo** de B si $\forall x \in B \quad x \leq M$.*

Ejercicio 2.2.6 *(Unicidad del mínimo y del máximo) Sean $\leq$ una relación de orden en un conjunto A, $B \subseteq A$, $m_1, m_2 \in B$ dos mínimos y $M_1, M_2 \in B$ dos máximos de B. Comprobar que $m_1 = m_2$ y que $M_1 = M_2$.*

Ejemplos 2.2.11 *1) $\emptyset$ es el mínimo y A el máximo del conjunto de las partes $P(A)$ del conjunto A, ordenado con la inclusión.*

2) -1 es el mínimo y 4 es el máximo del intervalo (cerrado) $[-1, 4] \subseteq \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ tiene el orden "menor o igual que."

3) En el conjunto de los números naturales ordenados por "ser divisor de," 1 es un mínimo, pero no existe un máximo.

Ejercicio 2.2.7 *Hallar, si existen, los máximos y mínimos de los conjuntos parcialmentes ordenados A y B del ejercicio (2.2.1).*

2.3 Funciones

Una función (o aplicación), $f : A \longrightarrow B$, de un conjunto no vacío A a un conjunto no vacío B se puede definir como "una regla de correspondencia que asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento $b = f(a) \in B$." Esta definición es muy intuitiva, pero no explica el término "regla de correspondencia" con suficiente claridad.

La siguiente definición es más general e identifica el concepto de función con una clase particular de relaciones binarias.

Definición 2.3.1 *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una* ***función (o aplicación)*** *$f : A \longrightarrow B$ es una relación binaria $f \subseteq A \times B$ tal que*

$f1)$ $dom(f) = A$,

$f2)$ si $a \in dom(f)$ existe un ***único*** *par ordenado $(a, f(a)) \in f$.*

Entonces una función $f : A \longrightarrow B$ es una relación entre A y B tal que a cada elemento de $a \in A$ corresponde un único elemento $f(a)$ del codominio B. Si $(a, f(a)) \in f$, se dirá que $f(a)$ es la **imagen de** a por la función f o el **valor de** f en a.

Test de la recta vertical: Una relación $R \subseteq A \times B$ es una función si y sólo si

1) $dom(R) = A$ y

2) su gráfica corta a cada "recta vertical" en un punto a lo más.

Ejemplos 2.3.2 *1) La relación binaria definida en el ejemplo (2.2.2) no es una función.*

2) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$, es tal que $dom(f) = \mathbb{R}$ y $Im(f) = \mathbb{R}$.

3) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, es tal que $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} (= [0, \infty))$. En este caso, $f^{-1}([0, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ y $f^{-1}((-2, 0]) = \{0\}$.

4) La función $f(x) = \sqrt{x}$ está definida sólo para números reales no negativos, entonces $dom(f) = Im(f) = [0, \infty)$.

5) El dominio de la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ es $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.

Dos funciónes $f, g \subseteq A \times B$ son **iguales** si y sólo si:

a) $dom(f) = dom(g)$

b) $\forall x \in dom(f),\ f(x) = g(x)$.

Ejemplo 2.3.3 *Las funciones $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = x^2, \forall x > 0$ no son iguales, ya que $dom(f) \neq dom(g)$.*

2.3.1 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición 2.3.4 *Una función $f : A \longrightarrow B$ es*

- ***inyectiva:*** *si* $\forall x, y \in A$,

  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ *o, equivalentemente,*

  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

  A elementos distintos x e y de A corresponden elementos distintos $f(x)$ y $f(y)$ de B.

- ***sobreyectiva:*** *si $f(A) = B$ o, equivalentemente, si*

  $\forall b \in B\ \exists a \in A$ *tal que* $f(a) = b$.

  Cada elemento de B es el imagen de al menos un elemento de A.

- ***biyectiva:*** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

  Por tanto, una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si

  $\forall b \in B\ \exists!$*(existe un único)* $a \in A$ *tal que* $f(a) = b$.

Test de la recta horizontal: Una función f es inyectiva si y sólo si cada "recta horizontal" corta la gráfica de f en un punto a lo más.

Ejemplos 2.3.5 *1) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$, es biyectiva.*

2) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.

3) La función $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ definida por $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$, es biyectiva.

*4) La función **proyección** sobre A, $p : A \times B \longrightarrow A$, definida por $p(a, b) = a$, es sobreyectiva y no es inyectiva (salvo que $card(B) = 1$).*

*5) La función **identidad** en A, $Id_A : A \longrightarrow A$, definida por $Id_A(a) = a$, es biyectiva.*

Observación 2 *Si $f : A \longrightarrow B$ es una función inyectiva, entonces la función $f : A \longrightarrow f(A)$ es biyectiva.*

2.3.2 Composición de funciones

Definición 2.3.6 *Sean* $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow C$ *dos funciones. La función* ***composición (o compuesta)*** *de* f *y* g *es la función* $g \circ f : A \longrightarrow C$ *definida por* $\forall a \in A, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a))$. *Entonces*

$$g \circ f = \{(a, g(f(a))) : a \in A\} \subseteq A \times C.$$

Ejercicios 2.3.1 *1) Sean* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *las funciones* $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ *y* $g(x) = x + 1$. *Verificar que* $g \circ f \neq f \circ g$. *(Entonces la composición de funciones no es conmutativa.)*

2) Demostrar que si $f : A \longrightarrow B$ *es una función, entonces* $f = Id_B \circ f = f \circ Id_A$.

3) Descomponer la función $f(x) = \sqrt{3 + (\frac{1}{2+sen(x)})^2}$ *en una composición de funciones más simples.*

Proposición 2.3.7 *Sean* $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow C$ *dos funciones. Entonces,*

1) Si f *y* g *son inyectivas,* $g \circ f$ *es inyectiva.*

2) Si f *y* g *son sobreyectivas,* $g \circ f$ *es sobreyectiva.*

3) Si f *y* g *son biyectivas,* $g \circ f$ *es biyectiva.*

Demostración 1) Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Tenemos que demostrar que $a_1 = a_2$.
Ya que g y f son inyectivas, $g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

2) Sea $c \in C$. Esta vez tenemos que verificar la existencia de un $a \in A$ tal que $g(f(a)) = c$.
Ya que g y f son sobreyectivas, $\exists b \in B$ tal que $g(b) = c$ y $\exists a \in A$ tal que $f(a) = b$. Entonces $\exists a \in A$ tal que $g(f(a)) = g(b) = c$.

3) Se sigue de 1) y 2). $\square$

2.3.3 Función inversa

Definición 2.3.8 *Dada una función biyectiva* $f : A \longrightarrow B$, *la relación binaria*

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\} \subseteq B \times A$$

es una función ya que (siendo f *biyectiva), para todo* $b \in B$, *existe un único* $a \in A$ *tal que* $b = f(a)$. *La función* f^{-1} *se denomina* ***función inversa*** *de* f.

Se sigue que $dom(f^{-1}) = Im(f)$ y $Im(f^{-1}) = dom(f)$.

Nota: el símbolo f^{-1} significa la inversa de f, no $\frac{1}{f}$.

Ejemplos 2.3.9 *1) La función inversa de la función identidad en A, Id_A, es la misma función Id_A.*

2) Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ la función $f(x) = \sqrt{x}$. No es dificil verificar que f es biyectiva y que $f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ es la función $f(x) = x^2$.

3) Para determinar la función inversa de la recta $f(x) = 3x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se puede usar el siguiente procedimiento:

a) escribimos $y = f(x) = 3x - 1$,

b) despejamos respecto de la variable x : $x = \frac{y+1}{3}$

c) intecambiamos las variables x e y : $y = \frac{x+1}{3}$

d) ponemos $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

Gráfica de $\mathbf{f^{-1}}$: si existe f^{-1}, su gráfica se obtiene tomando la simétrica de la gráfica de f respecto de la diagonal del primer y tercer cuadrante con $dom(f^{-1}) = Im(f)$ y $Im(f^{-1}) = dom(f)$. La figura 2.3 contiene las gráficas de las funciones x^2 y e^x con sus inversas: $\sqrt{x}$ y $ln(x)$.

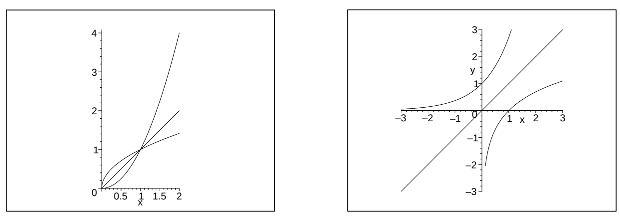

Figura 2.3: Gráficas de x^2, e^x y sus inversas

Proposición 2.3.10 *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones biyectivas. Entonces,*

1) $f^{-1} \circ f = Id_A$

2) $f \circ f^{-1} = Id_B$

3) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : C \longrightarrow A$

Ejercicio 2.3.1 *Demostrar la proposición (2.3.10).*

Ejercicio 2.3.2 *Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 4]$ la función **definida a trozos** por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2 & si \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Si f es biyectiva, hallar su inversa.

Capítulo 3

Números reales

En este capítulo se presenta una descripción del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, a partir de sus axiomas algebraicos, de orden total y de la propiedad del supremo (o completitud). Los números reales también se pueden construir a partir de las propiedades del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, pero esta construcción no se desarrollará. Al no desarrollar esta construcción no será posible demostrar la existencia de los números reales ni desarrollar la teoría necesaria para asegurar que los axiomas que vamos a presentar los definen únicamente.

Los números reales se pensarán asociados a una recta, **la recta real**, por medio de una correspondencia biyectiva: cada punto de la recta queda asociado a un único número real y viceversa.

Los conjuntos de los números naturales, enteros y racionales se estudiarán como subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces ellos también corresponden unívocamente a puntos de la recta real. La existencia de $\sqrt{2}$ (la longitud de la diagonal del cuadrado unitario) en $\mathbb{R}$ y no en $\mathbb{Q}$ probará que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, no es vacío.

Aunque $\mathbb{Q}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$, veremos que es posible aproximar todo número real, con la precisión que se desee, por medio de números racionales, es decir, tan cerca como queramos de cualquier número real hay números racionales. Este aspecto es particularmente importante ya que observaremos que el conjunto de los reales es no numerable (equivalentemente, se dice que tiene la *potencia del continuo*) y, por tanto, es "mucho más grande" que el conjunto de los números racionales, que es un conjunto numerable.

Finalmente, la representación decimal de los números reales nos hará entender como la teoría que vamos a ilustrar es la base de todas las aproximaciones numéricas que se emplean cada vez que se resuelve un problema concreto por medio de un ordenador. Está claro que escribir $\sqrt{2} = 1.41421$ no es correcto: el número que está a la izquierda es irracional mientras que el que está a la derecha es racional. El racional 1.41421 es simplemente una aproximación del valor real de $\sqrt{2}$ y, ajustados a las capacidades de nuestro ordenador, la teoría de los números reales nos dice que esta aproximación se puede mejorar arbitrariamente. Los métodos analíticos que se pueden emplear para realizar esta mejoría se desarrollarán en los siguientes capítulos.

El capítulo se cierra con una serie de reflexiones sobre el error que se introduce al utilizar métodos numéricos en la solución de problemas matemáticos (ver también la primera práctica con Maple V de esta asignatura).

3.1 Estructura algebraica de $\mathbb{R}$

Sean $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las operaciones binarias usuales de **adición** y de **multiplicación** definidas sobre $\mathbb{R}$.
El conjunto $\mathbb{R}$ con las operaciones de suma $+$ y producto $\cdot$ tiene *estructura de cuerpo* ($(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo) definida por los siguientes axiomas:

A1) (Propiedad conmutativa de la adición)
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$$
A2) (Propiedad asociativa de la adición)
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$
A3) (Existencia del elemento neutro de la adición)
$$\exists 0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = 0 + a = a$$
A4) (Existencia del opuesto)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists (-a) \in \mathbb{R} \text{ tal que } a + (-a) = (-a) + a = 0$$

M1) (Propiedad conmutativa de la multiplicación)
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a\ b = b\ a$$
M2) (Propiedad asociativa de la multiplicación)
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a\ b)\ c = a\ (b\ c)$$
M3) (Existencia del elemento neutro de la multiplicación)
$$\exists 1 \in \mathbb{R}\, (1 \neq 0) \text{ tal que } \forall a \in \mathbb{R} \quad a\ 1 = 1\ a = a$$
M4) (Existencia del inverso)
$$\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \quad \exists 1/a \in \mathbb{R} \text{ tal que } a\ (1/a) = (1/a)\ a = 1$$

D) (Propieded distributiva de la multiplicación respecto de la adición)
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a\ (b + c) = a\ b + a\ c \quad \text{y} \quad (b + c)\ a = b\ a + c\ a$$

Observación 3 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *es también un cuerpo.*

Propiedades:

- **(Reglas de cancelación en $\mathbb{R}$)**

  1) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = a + c$, entonces $b = c$.

2) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ son tales que $a\ b = a\ c$, entonces $b = c$.

En particular, las reglas de cancelación implican la **unicidad de los elementos neutros 0 y 1**.

- **(Unicidad del opuesto y del inverso en $\mathbb{R}$)**

  1) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = 0$, entonces $b = -a$.

  2) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ son tales que $a\ b = 1$, entonces $b = 1/a$.

- **(Unicidad de la solución de una ecuación lineal en $\mathbb{R}$)**

  Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

  1) La ecuación $a + x = b$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$, $x = b - a$.

  2) Si $a \neq 0$, la ecuación $a\ x = b$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$, $x = (1/a)\ b$.

  Observación 4 *Referido a la unicidad de la solución de una ecuación lineal en $\mathbb{R}$.*

  El apartado 1) es válido también en el conjunto de los números enteros, pero no lo es en el conjunto de los números naturales. El apartado 2) es válido también en el conjunto de los números racionales, pero no lo es en el conjunto de los números enteros.

- Para todo $a \in \mathbb{R}$,

  $a\ 0 = 0, \quad (-1)\ a = -a, \quad -(-a) = a \quad \text{y} \quad (-1)\ (-1) = 1.$

- Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

  1) $a \neq 0 \Rightarrow 1/a \neq 0 \quad \text{y} \quad 1/(1/a) = a$.

  2) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{ó} \quad b = 0$.

Estas propiedades se pueden verificar fácilmente.
Por ejemplo, la regla de cancelación 1), es decir, el hecho que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = a + c$ entonces $b = c$, se puede demostrar como sigue:

$$a + b = a + c \Rightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) \Rightarrow$$
$$(-a + a) + b = (-a + a) + c \Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c.$$

3.2 Las propiedades de orden en $\mathbb{R}$

En el conjunto de los números reales existe una noción de orden natural, ésta es la relación "menor que". Esta relación de orden se representa en la recta real por medio de la orientación usual de izquierda a derecha. Existe una forma conveniente de introducir esta relación de orden en $\mathbb{R}$ por medio de unas propiedades fundamentales de los números positivos, es decir de los números que están a la derecha de 0.

Axioma de orden: existe un subconjunto $\mathbb{R}^+$ no vacío de $\mathbb{R}$, el conjunto de los reales positivos, tal que

$O_1)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad a + b \in \mathbb{R}^+$

$O_2)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad ab \in \mathbb{R}^+$

$O_3)$(*Propiedad de tricotomía*) Si $a \in \mathbb{R}$ se cumple exactamente una de las siguientes: $a \in \mathbb{R}^+, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{R}^+$.

Notación:

Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces a es positivo (estrictamente) y se escribe $a > 0$

Si $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, entonces a es no negativo y se escribe $a \geq 0$

Si $-a \in \mathbb{R}^+$, entonces a es negativo y se escribe $a < 0$

Si $-a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, entonces a es no positivo y se escribe $a \leq 0$

Relaciones de orden:

La relación en $\mathbb{R}$ "menor que" está definida por

$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$.

La relación en $\mathbb{R}$ "menor o igual que" está definida por

$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ejercicio 3.2.1 *Verificar que la relación $\leq$ es una relación de orden y que la relación $<$ es una relación de orden estricto total.*

3.2.1 Intervalos

Ahora que tenemos un orden en $\mathbb{R}$, podemos definir y fijar la notación para los intervalos de la recta real.

Sean a y b dos números reales tales que $a \leq b$.

Intervalos acotados

Intervalos abiertos:

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Entonces $(a, a) = \emptyset$.

Intervalos cerrados:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
Entonces $[a, a] = \{a\}$ y $I = [0, 1]$ es el intervalo unitario.
Intervalos semiabiertos (o semicerrados):
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

La *longitud* de un intervalo acotado no vacío es igual a $b - a$.

Intervalos no acotados
Intervalos abiertos infinitos:
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
Intervalos cerrados infinitos:
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

3.2.2 Desigualdades

Las propiedades de orden de $\mathbb{R}$ nos permiten resolver problemas como el siguiente:

Ejemplo 3.2.1 *La relación entre las escalas Celsius y Fahrenheit está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura en grados Celsius y F la en grados Fahrenheit. ¿Que intervalo de valores en la escala Celsius corresponde al intervalo de temperatura $50 \leq F \leq 95$?*

Para hallar el intervalo de temperaturas en grados Celsius podemos simplificar la fórmula $C = \frac{5}{9}(F-32)$ del problema anterior y despejar la variable F en términos de la variable $C : F = \frac{9}{5}C+32$. Entonces $50 \leq \frac{9}{5}C+32 \leq 95$. Ahora tenemos que conocer qué operaciones algebraicas se pueden utilizar para simplificar una desigualdad preservando la información original sobre el orden de las variables empleadas.

Reglas de las desigualdades Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
1) $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Rightarrow a^2 > 0$
2) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$
3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
4) $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

5) i) $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$
ii) $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$
6) i) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
ii) $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$
7) Si $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es tal que $\forall b > 0, a \leq b$, entonces $a = 0$. (Esta propiedad se puede verificar por contrapositivo: si $a > 0$, el número positivo $\frac{a}{2}$ es tal que $0 < \frac{a}{2} < a$.)
8) i) si $ab > 0$ entonces a y b tienen el mismo signo.
ii) si $ab < 0$ entonces a y b tienen signo opuesto.

Observación 5 *La propiedad 7) implica que el conjunto $\mathbb{R}^+$ no tiene mínimo.*

Para hallar el intervalo del ejemplo (3.2.1) se puede proceder como sigue:
$C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32$
$50 \leq F \leq 95 \Rightarrow 50 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 95 \Rightarrow 18 \leq \frac{9}{5}C \leq 63 \Rightarrow 10 \leq C \leq 35.$
El intervalo buscado es $[10, 35]$.

Ejercicio 3.2.2 *Verificar que $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$.*

Ejemplo 3.2.2 *Determinar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 6x > -3\}$.*

$$\begin{aligned} &3x^2 - 6x > -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 > 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1. \end{aligned}$$

Entonces $A = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Ejercicio 3.2.3 *Determinar el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} : \frac{3x-1}{x+1} \leq 2\}$.*

Algunas desigualdades importantes:
1) La desigualdad de Bernoulli :
Sean $x > -1$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
La desigualdad de Bernoulli se puede demostrar por inducción:
si $n = 1, \quad x + 1 \geq x + 1$,
si $n \in \mathbb{N}$ y $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, entonces
$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) =$
$= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$

2) La desigualdad de Cauchy :

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Para verificar la desigualdad de Cauchy utilizamos que el cuadrado de todo número real es siempre no negativo. En particular,

$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

3) La desigualdad de la media aritmética-geométrica :

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

$\sqrt{ab}$ es la media geométrica y $\frac{a+b}{2}$ es la media aritmética de a y b.

Ejercicio 3.2.4 *Verificar que la desigualdad de Cauchy implica la desigualdad de la media aritmética-geométrica.*

3.3 Valor absoluto

La función valor absoluto es muy útil si queremos estimar los valores posibles de funciones reales y su definición está íntimamente relacionada con la definición de distancia entre dos números reales.

Definición 3.3.1 *Si $a \in \mathbb{R}$, el **valor absoluto** de a se define según la regla:*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0. \end{cases}$$

Se sigue directamente de la definición que, para todo a en $\mathbb{R}$:

$|a| \geq 0, \qquad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0, \qquad |a| = |-a|, \qquad a \leq |a|.$

Ejercicio 3.3.1 *Hallar las soluciones de la ecuación $|x-2| = |2x-1|$.*

Propiedades del valor absoluto: Para todos $a, b \in \mathbb{R}$,

1) $|ab| = |a|\,|b|$,

2) si $c \geq 0$, entonces

$|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$

$c \leq |a| \Leftrightarrow c \leq a$ ó $a \leq -c$,

3) *Desigualdad triangular:* $|a+b| \leq |a| + |b|$,

4) $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

Distancia en $\mathbb{R}$

Si a es un número real, su valor absoluto representa su distancia del cero. Esta observación fundamenta las siguientes definiciones de distancia y de entorno abierto en $\mathbb{R}$.

Definición 3.3.2 *1) Sean a y b dos números reales. La* ***distancia*** *entre a y b es el número $|a-b|$.*

2) Sean $a, r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. El ***entorno abierto de centro*** *a* ***y radio*** *r es el conjunto $I(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$.*

Ejercicios 3.3.1 *1) La producción diaria estimada, p, en una refinería es $|p - 2.250.000| < 125.000$, donde p se mide en barriles de petróleo. Determinar los niveles de producción más alto y más bajo.*

2) Determinar el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < |x|\}$.

3) Sea $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}$. Encontrar una constante M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [2,3]$.

4) Sea $a \in \mathbb{R}$. Verificar que si x es un número real tal que $\forall r > 0, \quad x \in I(a,r)$, entonces $x = a$. (Utilizar la regla 7) de las desigualdades.)

3.4 Completitud de $\mathbb{R}$

Antes de enunciar el último axioma que se necesita para caracterizar completamente el conjunto de los números reales, la propiedad de completitud, tenemos que definir los conceptos de extremo inferior y superior de un subconjunto de $\mathbb{R}$. La completitud de $\mathbb{R}$ nos permitirá, en el capítulo 5, establecer importantes criterios de convergencia para sucesiones reales. En ese mismo capítulo veremos también que el conjunto de los números racionales no es completo y, por tanto, existen sucesiones de números racionales que tienen como límite un número irracional.

3.4.1 Supremos e ínfimos

Dado un subconjunto de los números reales, es a menudo importante poder hallar sus puntos extremos, es decir los números "más grandes y más pequeños" que el conjunto puede contener. Veremos que en las aplicaciones es de particular interes hallar los valores extremos de funciones reales y que la teoría de la derivación nos dará algunas técnicas básicas para encontrarlos.

Es evidente que si estamos estudiando un intervalo acotado y cerrado $[a,b]$, entonces a es el valor mínimo y b es el valor máximo de este conjunto. Pero si nuestro conjunto es, por ejemplo, el intervalo $(0,5]$ o el intervalo $[-15,\infty)$, tenemos que extender las ideas intuitivas de máximo y mínimo.

Definición 3.4.1 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

Se dice que $s \in \mathbb{R}$ es una ***cota superior*** *de A (o que A está acotado superiormente) si $\quad \forall x \in A, \quad x \leq s$.*

De forma similar, se dice que $i \in \mathbb{R}$ es una ***cota inferior*** *de A (o que A está acotado inferiormente) si $\quad \forall x \in A, \quad i \leq x$.*

Si A tiene una cota superior y una cota inferior, se dice que a está ***acotado****.*

Ejemplos 3.4.2 *1) El intervalo $(-200, 40)$ está acotado. El intervalo $(50, \infty)$ no está acotado superiormente. El conjunto $(-\infty, 27) \cup \{300\}$ está acotado superiormente por 300.*

2)El conjunto $N = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente por $1, 50, 2345, \cdots$ e inferiormente por $0, -3, -65, \cdots$.

Un conjunto puede tener infinitas cotas superiores o inferiores. Es natural preguntarse si, por ejemplo en el caso del conjunto $N = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, existen cotas superiores o inferiores que se puedan distinguir entre todas las demás. La intuición nos dice que 1 (siendo un máximo) es una cota superior de N "mejor que" 2345 y que 0 es una cota inferior "mejor que" -65. 1 es la cota superior más pequeña y 0 es la cota inferior más grande.

Definición 3.4.3 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

Un número real S es un ***supremo*** *de A, $S = sup(A)$ si*

1) $\forall x \in A, \qquad x \leq S \quad$ (S es una cota superior) $\qquad$ y

2) si otro número real u es tal que $u < S$, entonces existe un elemento a del conjunto A tal que $u < a \leq S$. (S es la cota superior mínima.)

Un número real I es un ***ínfimo*** *de A, $I = inf(A)$, si*

1) $\forall x \in A, \qquad I \leq x \quad$ (I es una cota inferior) $\qquad$ y

2) si otro número real w es tal que $I < w$, entonces existe un elemento a del conjunto A tal que $I \leq a < w$. (I es la cota superior máxima.)

Ejemplos 3.4.4 *1) -200 y 40 son el inf y el sup del intervalo $(-200, 40)$. 50 es el inf del intervalo $(50, \infty)$ y el sup de este intervalo no existe. 300 es el sup (el máximo) del conjunto $(-\infty, 27) \cup \{300\}$ y el inf de este conjunto no existe.*

2) 1 es el sup y 0 es el inf del conjunto $N = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Proposición 3.4.5 *(Unicidad del supremo y del ínfimo)*

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces

1) si S_1 y S_2 son dos supremos de A, se sigue que $S_1 = S_2$,

2) si I_1 y I_2 son dos ínfimos de A, se sigue que $I_1 = I_2$.

Demostración Vamos a demostrar sólo la parte 1) de la proposición. La demostración de la parte 2) es similar.

La demostración se puede hacer por contrapositivo: se supone que $S_1 \neq S_2$ y se llega a la negación de la hipótesis de que S_1 y S_2 son supremos.

Si $S_1 \neq S_2$, entonces tenemos dos casos: $S_1 < S_2$ o $S_1 > S_2$.

Si $S_1 < S_2$, por ser S_2 un supremo existe $a \in A$ tal que $S_1 < a \leq S_2$. De la desigualdad $S_1 < a$ se deduce que S_1 no puede ser un supremo de A, ya que no es una cota superior.

Análogamente, si $S_2 < S_1$, por ser S_1 un supremo, existe $a \in A$ tal que $S_2 < a \leq S_1$ y S_2 no es una cota superior. $\square$

3.4.2 La propiedad del supremo de $\mathbb{R}$

El último axioma que falta para caracterizar el sistema de los números reales es el axioma de completitud o propiedad del supremo.

Para el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ de los números enteros no negativos vale el siguiente axioma de la buena ordenación.

Axioma de la buena ordenación de $\mathbb{N}\cup\{0\}$: todo conjunto no vacío de números enteros no negativos tiene un primer elemento (es decir, un elemento mínimo).

El axioma de la buena ordenación nos garantiza la existencia de un elemento *mínimo* de todo subconjunto de $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Es natural preguntarse si esta propiedad vale también para subconjuntos de los números reales. Por ejemplo, ¿podemos afirmar que el intervalo $(0, 300) \subset \mathbb{R}$ tiene un elemento mínimo?. Por cuanto visto en la secciones anteriores, $(0, 300)$ tiene un ínfimo, el número 0, pero 0 no es un elemento del intervalo abierto $(0, 300)$, por tanto no es un mínimo.

La propiedad que caracteriza los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ es el contenido del siguiente axioma.

Axioma de completitud de $\mathbb{R}$: todo conjunto no vacío A de $\mathbb{R}$ que tenga cota superior (cota inferior), tiene un supremo (un ínfimo) en $\mathbb{R}$.

Este axioma tiene importantes consecuencias que iremos tratando en las secciones y en los capítulos que siguen.

3.4.3 La propiedad de Arquímedes

Una primera consecuencia del axioma de completitud de los números reales involucra a los números naturales.

Teorema 3.4.6 ***(La propiedad de Arquímedes)***
Para todo número real $x \in \mathbb{R}$ existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

Demostración El teorema se demostrará por reducción al absurdo. Entonces nuestra hipótesis será que existe un número real $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $x \geq n$. Esta afirmación implica que el conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente (por x) y, por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$, tiene un supremo $S = sup(\mathbb{N})$ en $\mathbb{R}$. Siendo $S - 1$ un número real estrictamente menor que S, se sigue de las propiedades de supremo de S que existe un número natural m tal que $S - 1 < m \leq S$. La desigualdad $S - 1 < m$ implica que $S < m + 1$ y $m + 1$ es un número natural. Esta es una contradicción ya que S es una cota superior de $\mathbb{N}$. $\square$

El siguiente corolario se utilizará en la demostración de la existencia de números irracionales.

Corolario 3.4.7 *Sea $x > 0$ un número real positivo, entonces existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.*

Demostración Si x es positivo también $\frac{1}{x}$ es un número positivo y, por la propiedad de Arquímedes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} < n$. De la última desigualdad se sigue que $\frac{1}{n} < x$. $\square$

3.4.4 La existencia de $\sqrt{2}$

En esta sección vamos a verificar que los números racionales forman un subconjunto propio de los números reales. Por tanto el conjunto $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ de los **números irracionales** no es vacío. Nos hace falta simplemente encontrar un número real que no es un racional.

Observación 6 *Si a y b son dos números reales* no negativos *entonces $a^2 \leq b^2$, si y sólo si $a \leq b$. Esta propiedad se sigue directamente de la igualdad $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.*

Teorema 3.4.8 ***(La existencia de** $\sqrt{2}$**)***
Existe un número real positivo S tal que $S^2 = 2$.

Demostración Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$. El conjunto A contiene el número 1, entonces no es vacío. Además, por la observación anterior, A está acotado superiormente (por ejemplo, por 2). Por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$, existe un número real que es el supremo de A, $S = sup(A) > 1$.
Hay que verificar que $S^2 = 2$.
En la demostración se puede proceder por contrapositivo: se supone que $S^2 \neq 2$ y se llega a contradecir que S es el supremo de A.

Caso1: $S^2 < 2$. Vamos a verificar que en este caso se puede encontrar un número natural n tal que $(S + \frac{1}{n})$ es un elemento de A mayor que el supremo S. (Esta es una contradicción, ya que S tiene que ser mayor o igual de todo elemento de A.)
Si $(S+\frac{1}{n})$ tiene que ser un elemento de A, el número n que estamos buscando tiene que ser tal que $(S + \frac{1}{n})^2 < 2$. Simplificando la expresión $(S + \frac{1}{n})^2$ se obtiene la siguente desigualdad:

$$(S + \frac{1}{n})^2 = S^2 + \frac{2S}{n} + \frac{1}{n^2} = S^2 + \frac{1}{n}(2S + \frac{1}{n}) < S^2 + \frac{1}{n}(2S + 1).$$

Ahora, si n es tal que $S^2 + \frac{1}{n}(2S + 1) < 2$, se verifica también que $(S + \frac{1}{n})^2 < 2$. Para encontrar el valor adecuado de n despejamos respecto de $\frac{1}{n}$ la desigualdad $S^2 + \frac{1}{n}(2S + 1) < 2$. Se obtiene la nueva desigualdad $\frac{1}{n} < \frac{2-S^2}{2S+1}$. Siendo $\frac{2-S^2}{2S+1}$ un número positivo ($S^2 < 2$ y $S > 1$), por el corolario (3.4.7) con $x = \frac{2-S^2}{2S+1}$, se sigue que existe un valor de n tal que $\frac{1}{n} < \frac{2-S^2}{2S+1}$.

Caso2: $S^2 > 2$. Esta vez vamos a verificar que se puede encontrar un número natural n tal que $(S-\frac{1}{n})$ es un cota superior de A menor del supremo S. (Esta es una contradicción ya que S es la cota superior mínima del conjunto A.)
Si el número n que estamos buscando es tal que $(S - \frac{1}{n})^2 > 2$ y $S - \frac{1}{n} > 0$, por la observación anterior resulta que para todo $x \in A$ $\quad S - \frac{1}{n} > x$ y $S - \frac{1}{n}$ es una cota superior de A.
Simplificando la expresión de $(S - \frac{1}{n})^2$ se obtiene la siguente desigualdad:

$$(S - \frac{1}{n})^2 = S^2 - \frac{2S}{n} + \frac{1}{n^2} > S^2 - \frac{2S}{n}.$$

Ahora, si n es tal que $S^2 - \frac{2S}{n} > 2$, se verifica también que $(S - \frac{1}{n})^2 > 2$. Para encontrar el valor adecuado de n despejamos respecto de $\frac{1}{n}$ la desigualdad

$S^2 - \frac{2S}{n} > 2$. Se obtiene la nueva desigualdad $\frac{1}{n} < \frac{S^2-2}{2S}$. Siendo $\frac{S^2-2}{2S}$ un número positivo ($S^2 > 2$ y $S > 1$), por el corolario (3.4.7) con $x = \frac{S^2-2}{2S}$, se sigue que existe un valor de n tal que $\frac{1}{n} < \frac{S^2-2}{2S}$. Si este valor de n no es tal que $S - \frac{1}{n} > 0$, se condidera un valor $m \in \mathbb{N}$ tal que $S - \frac{1}{m} > 0$ (este valor existe por el corolario (3.4.7)) y $m > n$. $\square$

Observación 7 *La demostración anterior se puede generalizar para demostrar la existencia de la raíz cuadrada y, más en general, de orden* $n \in \mathbb{N}$, *de un cualquier número real no negativo.*

Ahora que hemos establecido su existencia, podemos verificar que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Por empezar, hay que considerar la siguiente propiedad de los enteros pares.

Lema 3.4.9 *Si n es un número entero tal que n^2 es par, n es par.*

Demostración Podemos utilizar una demostración por contrapositivo:

$$n = 2k + 1, \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Entonces n impar implica n^2 impar. $\square$

Teorema 3.4.10 *No existe un número racional r tal que $r^2 = 2$.*

Demostración Haremos esta demostración por reducción al absurdo. Entonces sea $r = \frac{p}{q}$ un número racional tal que $r^2 = 2$. Podemos simplificar la fracción $\frac{p}{q}$ de forma tal que p y q no tengan factores comunes distintos de 1 y -1. De la igualdad $r^2 = 2$ se sigue que $p^2 = 2\,q^2$ y que p^2 es un entero par. Por el lema anterior, p es par. Entonces $p = 2\,m$, con $m \in \mathbb{Z}$. También se sigue que $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{4\,m^2}{2} = 2\,m^2$ es par. Hemos llegado a una contradicción, ya que p y q no pueden tener el factor comun 2. $\square$

Finalmente podemos afirmar que existen números reales que no son racionales. El conjunto (no vacío) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ es el conjunto de los **números irracionales**.

3.4.5 Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Acabamos de verificar que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$. Sin embargo, si a es un número real cualquiera (por ejemplo un irracional) y, a partir del punto a, nos desplazamos sobre la recta real una cantidad arbitrariamente pequeña (hacia la derecha o la izquierda) hasta llegar a un nuevo punto b, siempre podemos encontrar un número racional r que está entre a y b. Esta propiedad de los números racionales se expresa diciendo que $\mathbb{Q}$ **es denso** en $\mathbb{R}$.

Observación 8 *Si $x > 0$ es un número real positivo existe un número entero no negativo, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $n \leq x < n+1$. Al número n se le denomina **parte entera** de x y se escribe $n = [x]$. (La definición de parte entera de un real se justifica utilizando la propiedad de Arquímedes de $\mathbb{N}$: si x es positivo, el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : x < m+1\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Por el axioma de la buena ordenación de $\mathbb{N} \cup \{0\}$, el conjunto A tiene un mínimo n. Entonces n es tal que $n \leq x < n+1$.)*

Teorema 3.4.11 ***(Teorema de densidad de*** $\mathbb{Q}$***)*** *Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. Entonces existe un número racional r tal que $a < r < b$.*

Demostración Sea a positivo. Ya que $b - a$ es un número positivo, por la propiedad de Arquímedes existe un número natural n tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Entonces n es tal que $1 < n(b-a) = nb - na$, es decir, tal que $1 + na < nb$. El número na es también positivo, entonces su parte entera, $[na]$, es tal que $[na] \leq na < [na] + 1$. Además $na < 1 + [na] \leq 1 + na < nb$ y $a < \frac{1+[na]}{n} < b$, donde $r = \frac{1+[na]}{n}$ es un número racional.
Si ahora $a \leq 0$, $-a$ es no negativo y, por la propiedad de Arquímedes, existe un número natural n tal que $-a < n$, es decir, tal que $n + a > 0$. Ya que $b > a$, se sigue también que $0 < n + a < n + b$. Por la primera parte de esta demostración, existe un número racional s tal que $n + a < s < n + b$. De estas últimas desigualdades se sigue que el número racional $r = s - n$ es tal que $a < r < b$. □

Del teorema anterior se sigue facilmente que también los números irracionales son densos en $\mathbb{R}$:

Teorema 3.4.12 ***(Teorema de densidad de*** $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$***)*** *Los números irracionales son densos en $\mathbb{R}$.*

Demostración Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. Entonces $\frac{a}{\sqrt{2}}$ y $\frac{b}{\sqrt{2}}$ son dos números reales y, por el teorema de densidad de $\mathbb{Q}$, existe un número racional r tal que $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Se sigue que el número irracional $\sqrt{2}\,r$ (¿por qué no es racional?) es tal que $a < \sqrt{2}\,r < b$. $\square$

3.4.6 Intervalos encajados y representación decimal

Todo número real tiene una representación decimal (finita o infinita) y esta representación nos permite distinguir entre números racionales y números irracionales. Por ejemplo:

$$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{23}{45} \approx 0.5111111111 \quad \frac{19}{88} \approx 0.21590909090$$
$$e \approx 2.718281828 \quad \pi \approx 3.141592654 \quad \sqrt{2} \approx 1.414213562.$$

Los números que aparecen en la primera fila son todos racionales y, por tanto, tienen representación decimal **finita o infinita periódica** (existe una secuencia de dígitos que se repite indefinidamente). Los números de la segunda fila son irracionales y, por tanto, tienen representación decimal **infinita no periódica**.
En esta sección nos interesa obtener la representación decimal de números reales por medio de familias de intervalos acotados y cerrados, $I_n = [a_n, b_n]$, que además tengan la propiedad de estar **encajados**: $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} \subset I_n$. Se puede verificar que si $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de intervalos acotados, cerrados y encajados, entonces la intersección de todos los intervalos de la familia es no vacía. Además, si $inf(\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ la intersección de los intervalos de nuestra familia consiste de un solo elemento.

Ejemplos 3.4.13 *1) Para todo número natural n, sea $I_n = [0, \frac{1}{n}]$. Entonces $I_{n+1} = [0, \frac{1}{n+1}] \subset I_n = [0, \frac{1}{n}]$. Además $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.*

2) Para todo número natural n, sea $I_n = (0, \frac{1}{n})$. Entonces $I_{n+1} = (0, \frac{1}{n+1}) \subset I_n = (0, \frac{1}{n})$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Ahora, si x es un número real positivo con parte entera igual a n, el número $x - n$ es tal que $0 \leq x - n < 1$. Se sigue que si conocemos la representación decimal de los números reales del intervalo $[0, 1)$, somos también capaces de representar en forma decimal todos los reales positivos. La representación de un real negativo x será igual al valor opuesto de la representación de $-x$.

Sea entonces x un elemento del intervalo $[0, 1)$. Si dividimos $[0, 1]$ en 10 subintervalos de longitud $\frac{1}{10}$, el número x pertenece a uno de estos subintervalos, $I_1 = [\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}]$, donde $a_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$\circ---\circ---\circ---\circ---\bullet---\bullet---\circ---\circ---\circ---\circ---\circ$$
$$0 \quad \tfrac{1}{10} \quad \tfrac{2}{10} \quad \tfrac{a_1-1}{10} \quad \tfrac{a_1}{10} \;\; x \;\; \tfrac{a_1+1}{10} \quad \tfrac{6}{10} \quad \tfrac{7}{10} \quad \tfrac{8}{10} \quad \tfrac{9}{10} \quad 1$$

Si x coincide con uno de los puntos de subdivisión, $x = \frac{a_1}{10}$, para definir I_1 hay que elegir entre el intervalo $[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}]$ y el intervalo $[\frac{a_1-1}{10}, \frac{a_1}{10}]$. Por ejemplo, sea $I_1 = [\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}]$.

$$\circ---\circ---\circ---\bullet---\bullet---\bullet---\circ---\circ---\circ---\circ---\circ$$
$$0 \quad \tfrac{1}{10} \quad \tfrac{2}{10} \quad \tfrac{a_1-1}{10} \quad x = \tfrac{a_1}{10} \quad \tfrac{a_1+1}{10} \quad \tfrac{6}{10} \quad \tfrac{7}{10} \quad \tfrac{8}{10} \quad \tfrac{9}{10} \quad 1$$

Ahora dividimos el intervalo I_1 en 10 subintervalos de longitud $\frac{1}{100}$. El número x pertenece a uno de estos subintervalos, $I_2 = [\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{100}]$, donde $a_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subset I_1$.

$$\circ---\circ---\circ---\circ---\bullet---\bullet---\circ---\circ---\circ---\circ---\circ$$
$$\tfrac{a_1}{10} \qquad (\tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{100}) \;\; x \;\; (\tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2+1}{100}) \qquad \tfrac{a_1+1}{10}$$

En el caso $x = \frac{a_1}{10}$, se define $I_2 = [\frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10} + \frac{1}{100}] \subset I_1$.

$$\bullet---\bullet---\circ---\circ---\circ---\circ---\circ---\circ---\circ---\circ---\circ$$
$$\tfrac{a_1}{10} = x \quad \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{1}{100} \qquad \tfrac{a_1+1}{10}$$

Siguiendo en elegir y subdividir intervalos, se obtiene una familia de intervalos cerrados, acotados y encajados, $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Todo intervalo I_n de la familia contiene x y su longitud es $\frac{1}{10^n}$. Entonces $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Después de n subdivisiones, se habrá que $x \in I_n$, es decir que

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le x \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Al paso n se obtiene una aproximación de la representación decimal de x :

$$x \approx 0.a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n.$$

Observación 9 *En el caso que x sea uno de los puntos de subdivisión de los intervalos (es decir, si $x = \frac{a_n}{10^n}$ para cierto número natural n), la aproximación de x no está únicamente determinada. Sin embargo, la representación decimal de x puede ser sólo de los dos siguientes tipos:*

$$0.a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n\, 000000 \cdots \quad \textit{ó} \quad 0.a_1\, a_2\, a_3 \cdots (a_n - 1)\, 999999 \cdots .$$

3.5 Conjuntos infinitos

En esta sección vamos a "contar" el número de elementos de varios conjuntos. En la sección (2.1.4) hablamos de conjuntos finitos e infinitos de forma intuitiva, pero no todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número (infinito) de elementos. De este punto de vista los conjuntos infinitos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son (como uno puede adivinar) muy distintos, siendo $\mathbb{R}$ mucho más grande que $\mathbb{Q}$. Por otro lado, el hecho de que $\mathbb{Q}$ tiene el mismo número de elementos de $\mathbb{N}$ y de $\mathbb{Z}$ es mucho menos intuitivo.

Dos conjuntos A y B se dirán **equipotentes** si existe alguna función biyectiva entre ellos. Si A es un conjunto, no es dificil verificar que la relación de equipotencia es una relación de equivalencia en el conjunto de las partes de A.

3.5.1 Conjuntos finitos

Para poder definir rigurosamente la propiedad de un conjunto de ser finito, se utiliza un modelo básico de conjunto, el conjunto de los primeros n números naturales $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Definición 3.5.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que un conjunto A tiene n elementos (o que el cardinal de A es n) si existe una biyección de $\mathbb{N}_n$ en A.*
*Si A es vacío o tiene n elementos, A es un conjunto **finito**. Todo conjunto A que no es finito es **infinito**.*

Principio del palomar: Si m y n son dos números naturales tales que $m > n$, entonces no existe ninguna inyección de $\mathbb{N}_m$ en $\mathbb{N}_n$.
El principio del palomar se puede demostrar por inducción sobre n.

Ejemplo 3.5.2 *En un grupo de 53 personas al menos dos de ellas tienen su cumpleaños durante la misma semana del año 2000.*
Sean A el conjunto de las 53 personas y S el conjunto de las 52 semanas del año 2000. Entonces existen dos funciones biyectivas $f : \mathbb{N}_{53} \to A$ y $g : S \to \mathbb{N}_{52}$. Si ahora definimos la función $c : A \to S$ como la función que asocia a cada persona de A la semana de su cumpleaños, se trata de verificar que c no puede ser inyectiva. Si lo fuera, la función $g \circ c \circ f : \mathbb{N}_{53} \to \mathbb{N}_{52}$ sería inyectiva por ser igual a la composición de tres funciones inyectivas. Pero, por el principio del palomar, no existe ninguna inyección de $\mathbb{N}_{53}$ en $\mathbb{N}_{52}$.

Ejercicios 3.5.1 *1) Sean A_1 y A_2 dos conjuntos finitos. Verificar que $card(A_1) = card(A_2)$ si y sólo si existe una biyección entre A_1 y A_2.*
2) Sean m y n dos números naturales tales que $m \leq n$. Definir funciones inyectivas de $\mathbb{N}_m$ en $\mathbb{N}_n$ y de $\mathbb{N}_n$ en $\mathbb{N}$.

Una consecuencia del principio del palomar es que para ningún número natural, n, puede existir una función inyectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}_n$. Si así fuese, existiría también una inyección de $\mathbb{N}_{n+1}$ en $\mathbb{N}_n$. Entonces **el conjunto de los números naturales es infinito**.

Las siguientes propiedades explican la relación entre la inclusión de un conjunto A en un conjunto B y el cardinal de A y B.
Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq B$. Entonces,

- B finito $\Rightarrow$ A finito
- A infinito $\Rightarrow$ B infinito.

La primera de las propiedades anteriores se puede verificar por inducción sobre el cardinal de B. La segunda se sigue directamente de la primera por contrapositivo y implica que **el conjunto de los números reales es infinito.**

3.5.2 Conjuntos numerables

Hemos visto que el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito. En realidad $\mathbb{N}$ es el conjunto modelo para toda una clase de conjuntos infinitos, la clase de los conjuntos numerables.

Definición 3.5.3 *Un conjunto A es* ***numerable*** *si existe una biyección entre $\mathbb{N}$ y A.*

Entonces $\mathbb{N}$ es numerable y también el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable: una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ es la función

$$f(n) = \begin{cases} k & \text{si n=2k,} \\ -k & \text{si n=2k+1,} \end{cases}$$

donde hemos utilizado el hecho de que el conjunto de los números naturales es la unión de los naturales pares $Par = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ con los naturales impares $Impar = \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$.

Por definición, los conjuntos Par y $Impar$ son numerables, ya que la función $p : Par \to \mathbb{N}$, definida por $p(2k) = k$, y la función $i : Impar \to \mathbb{N}$, definida por $i(2k-1) = k$, son biyectivas.

Ejercicio 3.5.1 *Verificar que la unión de dos conjuntos numerables disjuntos es un conjunto numerable.*

Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq B$. Entonces,

- B numerable $\Rightarrow A$ numerable o finito
- A infinito no numerable $\Rightarrow B$ infinito no numerable.

Teorema 3.5.4 *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.*

Demostración Ya que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, donde $\mathbb{Q}^+$ es el conjunto de los racionales positivos y $\mathbb{Q}^-$ de los racionales negativos, si $\mathbb{Q}^+$ es numerable, $\mathbb{Q}$ es también numerable. Todo elemento de $\mathbb{Q}^+$ se puede representar por medio de una fracción $\frac{p}{q}$, donde p y q son números naturales. Entonces $\mathbb{Q}^+$ se puede considerar como un subconjunto del conjunto de las fracciones positivas $\mathbb{F}^+ = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}\}$. Si $\mathbb{F}^+$ es numerable, $\mathbb{Q}^+$ tiene que ser también numerable. Vamos a contar los elementos de $\mathbb{F}^+$ por medio de la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Las fracciones que pertenecen a la misma fila tiene igual denominador y las que pertenecen a la misma columna igual numerador. Las flechas nos indican como ordenar las fracciones de la tabla: la primera es $\frac{1}{1}$ y tenemos que bajar a la siguiente fila para empezar a contar siguiendo las flechas. Entonces la segunda fracción es $\frac{1}{2}$ y la tercera es $\frac{2}{1}$. Ahora bajamos a la fila sucesiva y seguimos contando. Lo que queda definido de esta forma es una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{F}^+$. Entonces $\mathbb{F}^+$ es numerable. $\square$

3.5.3 Conjuntos no numerables

Para verificar que el conjunto de los números reales no es numerable vamos a demostrar que el subconjunto $I = [0,1]$ de $\mathbb{R}$ no puede ser numerable: si $\mathbb{R}$ fuese numerable, $I = [0,1]$ tendría que ser finito o numerable.

Teorema 3.5.5 *El conjunto $I = [0,1]$ no es numerable.*

Demostración La demostración se hará por reducción al absurdo.
Hemos visto que todo $x \in [0,1]$ tiene una representación decimal y que esta representación no es siempre única.
Supongamos que exista una biyección f de $\mathbb{N}$ a $[0,1]$ (así que $[0,1]$ sería numerable). Por medio de la función f se podrían entonces numerar los números reales:

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15} \ \cdots \\ f(2) & = & 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25} \ \cdots \\ f(3) & = & 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35} \ \cdots \\ f(4) & = & 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45} \ \cdots \\ f(5) & = & 0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55} \ \cdots \\ \vdots & & \quad \vdots \end{array}$$

Para llegar a una contradicción, hay que hallar un número real x en $[0,1]$ que no pertenezca a la imagen de f (que es la lista anterior), así que f no sería sobreyectiva. Un problema al definir x por medio de su representación decimal es que tenemos que estar seguros de que esta representación no sea de las que acaban con todos ceros o todos nueves. Si la representación de x no es de estos dos tipos, el número x no puede ser igual a uno ya contenido en nuestra lista, pero expresado de otra forma. Por esta razón, definimos los dígitos de la representación de $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ siempre iguales a 1 o a 5, según el siguiente criterio: mirando a los dígitos que están en la diagonal de la lista, si $a_{11} = 1$ definimos $x_1 = 5$ y si $a_{11} \neq 1$ definimos $x_1 = 1$. Se sigue que x no puede ser igual a $f(1)$. Ahora, si $a_{22} = 1$ definimos $x_2 = 5$ y si $a_{22} \neq 1$ definimos $x_2 = 1$. Por estos valores de x_1 y x_2, el número x no puede ser igual ni a $f(1)$, ni a $f(2)$. Bajando a lo largo de la diagonal y definiendo los dígitos de x como antes, se obtiene un número que no puede ser un elemento de la imagen de f. $\square$

Del teorema anterior se sigue que **el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable,** ya que $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Se dice que los conjuntos que son equipotentes al conjunto de los números reales tienen **la potencia del continuo**.
Ahora, ya que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, se sigue también que **el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no es numerable.**

3.6 Precisión en los métodos numéricos

(Ver [GG])

Cuando no se puede obtener una solución exacta de un problema matemático, tenemos que recurrir a **métodos numéricos**. Los métodos numéricos utilizan algoritmos que permiten hallar una solución aproximada del problema y se basan, en general, en la *discretización* del problema y en métodos iterativos de aproximación (veremos algunos ejemplos en los siguientes capítulos y durante las prácticas de laboratorio con Maple V).

Si empleamos métodos numéricos, es de fundamental importancia poder acotar el **error** asociado a nuestra aproximación.

Si A es un número exacto y a es una aproximación de A, se define el **error absoluto** como $\Delta = |a - A|$.

En la práctica interesa encontrar una cota Δ_a tal que $\Delta \leq \Delta_a$, es decir, tal que $A \in (a - \Delta_a, a + \Delta_a)$.

Hay situaciones en las cuales el error absoluto no es informativo, debido a la presencia en el problema de objetos de distintos órdenes de magnitud (un error de 1 metro es muy significativo si estamos midiendo la longitud de una mesa, pero lo es muy poco si estamos midiendo la distancia entre dos planetas). En estos caso se utiliza el **error relativo**, definido como $\delta = \dfrac{\Delta}{A}$, o una cota del error realtivo, δ_a, tal que $\delta \leq \delta_a$.

En los modelos numéricos pueden aparecer errores por distintas razones.

- **Errores en los datos:** las medidas u observaciones experimentales pueden estar afectadas por errores de medición del aparado o por errores de apreciación.

- **Errores de truncamiento:** se presentan si en el método numerico utilizado se están empleando aproximaciones sucesivas y se consideran un número finito de iteraciones. Por ejemplo, en el método para obtener la representación decimal de un número real por medio de intervalos encajados u otros métodos de aproximación de raíces que se presenterán en los siguientes capítulos.

A menudo existen procedimientos para acotar el error proporcionados por el mismo método empleado. Por ejemplo, en el capítulo 9, veremos como el teorema de Taylor nos proporciona una fórmula para estimar el error de aproximación del valor de una función real en un punto, cuando se utilize un polinomio aproximante de grado n.

- **Errores de redondeo:** aparecen al utilizar una calculadora u ordenador para cálculos numéricos. La causa de estos errores es que una máquina puede utilizar solo un conjunto finito de números para representar a todos los números reales (un conjunto infinito no numerable).

  Los ordenadores pueden utilizar dos tipos de aritmética:

  1) Aritmética racional de precisión arbitraria. Permite realizar cálculos con números racionales de modo exacto, pero es poco eficiente para algunos problemas, debido al tiempo y espacio de memoria que requiere el uso, almacenamiento y representación de números racionales arbitrarios. (Es la que utiliza Maple V, salvo especificación contraria.)

  2) Aritmética de coma flotante. Es la que tienen incorporada la mayoría de los sistemas, se trabaja con un número finito (fijo) de números (determinados por el valor de "Digits" en Maple V) y los cálculos se realizan con representaciones aproximadas del número verdadero.

  Un número en coma flotante de n dígitos en base b tiene la forma

  $$x = \pm(d_1{'}d_2d_3\cdots d_n)b^e,$$

  donde $d_1{'}d_2d_3\cdots d_n$ es la *mantisa*, con $d_1 \neq 0$ y $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ enteros no negativos módulo b y e es un número entero que se llama *exponente*, que puede variar en un cierto rango que depende de los distintos sistemas.

  Por ejemplo si $b = 10$ y $n = 6$,

$326'6041$	se representa como	$+3'26604 \cdot 10^2$
$-15'24$	se representa como	$-1'52400 \cdot 10$
-642973441	se representa como	$-6'42973 \cdot 10^7$
-642973293	se representa como	$-6'42973 \cdot 10^7$
$0'0062$	se representa como	$+6'20000 \cdot 10^{-3}$

En el primer caso el error de redondeo es menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, en el segundo no hay errores de redondeo, en el tercer y cuarto números, que tienen la misma representación con redondeo a 6 dígitos, una cota del error es $\frac{1}{2}10^2$ y en el quinto caso no hay error de redondeo.

Ejercicio 3.6.1 *Sean* $A = +4'61903 \cdot 10^{-1}$ *y* $B = +3'21864 \cdot 10^{-4}$ $(b = 0, n = 6)$. *Verificar que* $(A + B) - B \neq B$.

La propagación del error de redondeo puede dar lugar a resultados desastrosos. En ocasiones se pueden utilizar propiedades algebraicas para reescribir los algoritmos de modo que sea menor la propagación del error.

Ejemplo 3.6.1 *La ecuación de segundo grado* $x^2 - 6210x + 1 = 0$ *tiene una solución igual a*

$$c = \frac{6210 - \sqrt{(6210)^2 - 4}}{2}.$$

Su valor aproximado con $n = 6$ *es* ≈ 0 *y con* $n = 8$ *es* $\approx 1'6103707 \cdot 10^{-4}$.

Entonces el error de redondeo con $n = 6$ *es mayor que* 10^{-4}, *que es un error significativo. La razón de esto error es que en el numerador de c restamos dos números muy próximos.*

Si multiplicamos y dividimos c por el conjugado de su numerador se obtiene la expresión

$$c = \frac{(6210)^2 - (6210)^2 + 4}{2(6210 + \sqrt{(6210)^2 - 4})} = \frac{2}{6210 + \sqrt{(6210)^2 - 4}},$$

cuyo valor aproximado con $n = 6$ *es* $1'610 \cdot 10^{-4}$, *que es una buena aproximación.*

Capítulo 4

Números complejos

En matemáticas es preciso introducir los números complejos debido a que el cuadrado de cualquier número real es siempre un número positivo, por lo que ecuaciones cuadráticas elementales tales como $x^2 = -1$ no tienen solución en el contexto de los números reales. Los números complejos nos permiten obtener soluciones de estas ecuaciones.

El estudio de los números complejos se desarrollerá durante la segunda práctica de laboratorio con Maple V de esta asignatura.

4.1 Definición de números complejos

El conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(a,b) : a \text{ y } b \text{ son números reales}\}$ con las siguientes operaciones de suma y producto:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \qquad (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc), \tag{4.1}$$

(donde a, b, c y d son números reales), tiene estructura de cuerpo, **el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.**

Se llama **unidad imaginaria** al número complejo **i=(0,1)**, que satisface la relación $i^2 = (-1,0)$.

$(0,0)$ es el **elemento neutro de la adición**, el **opuesto** de (a,b) es $(-a,-b)$.

$(1,0)$ es el **elemento neutro de la multiplicación** y, si (a,b) no es igual a $(0,0)$, el **inverso** de (a,b) es $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se identifica con el subconjunto $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(a,0) : a \text{ es un número real}\} \subset \mathbb{C}$. Entonces podemos escribir que $i^2 = -1$.

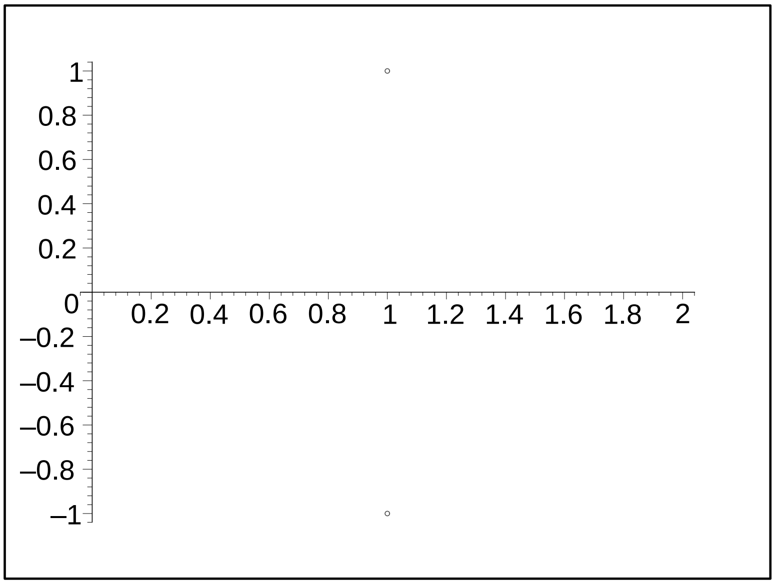

Figura 4.1: Números complejos conjugados

4.2 Expresión binómica

Todo número complejo $z = (a, b)$ puede expresarse, también, en la que se llama su **forma binómica**, que es $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{bi}$.
El número a es su **parte real**, $a = Re(z)$, y el número b es su **parte imaginaria**, $b = Im(z)$.

Ejemplo 4.2.1 *Sea*

$$z = \frac{1}{26}\sqrt{416 + 26\sqrt{377}} + \frac{1}{26}\, i\, \sqrt{-416 + 26\sqrt{377}}.$$

Entonces,

$$Re(z) = \frac{1}{26}\sqrt{416 + 26\sqrt{377}}$$
$$Im(z) = \frac{1}{26}\sqrt{-416 + 26\sqrt{377}}$$

Observación 10 *La ecuación* $x^2 + 1 = 0$, *que no tiene soluciones reales, sí que tiene soluciones complejas:* $i, -i$.

Los números complejos se pueden representar en un plano, en el que el eje de abcisas es el eje real, y el eje de ordenadas el imaginario. La figura (4.1) ilustra la representación del número complejo $1+i$ y de su **conjugado** (el complejo que tiene la misma parte real y la parte imaginaria opuesta al dado, en este caso $1-i$). Como puede verse, el conjugado de z es el punto simétrico de z respecto del eje real (el eje de abcisas o eje horizontal). Al conjugado de z se le representa por $\bar{z}$. Así pues, $\overline{1+i} = 1-i$.

Los números complejos se multiplican de la forma habitual, recordando que $i^2 = -1$. Por ejemplo,

$$(2+2i)(3-2i) = 10+2i$$

Obviamente, el resto de las operaciones elementales (suma, resta, división) se pueden efectuar directamente, teniéndose por ejemplo:

$$\begin{aligned} (2+3i)+(4+5i) &= 6+8i \\ (2+3i)-(4+5i) &= -2-2i \\ \frac{(2+3i)}{(4+5i)} = \frac{(2+3i)}{(4+5i)}\frac{(4-5i)}{(4-5i)} &= \frac{(2+3i)(4-5i)}{16+25} = \frac{23-2i}{41}. \end{aligned}$$

El número complejo $z = a+bi$ se identifica con el punto (a,b) del plano complejo. (En particular la unidad imaginaria i será en este caso el punto $(0,1)$ del plano complejo). El **módulo o valor absoluto** de un número complejo $z=(a,b)$ es el valor de su distancia al punto $(0,0)$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. El valor del módulo del número complejo $z=(a,b)$ es la longitud del segmento que une el punto $(0,0)$ con el punto (a,b). Siendo $\bar{z}$ representado por el par $(a,-b)$, el módulo de z y de su conjugado son iguales.

4.3 Expresión polar, trigonométrica y exponencial

Un número complejo z (a excepción del 0) también se puede representar por su módulo, $|z|$ y el ángulo que forma con el eje real, pero teniendo en cuenta que, si $z = a+ib$, hay una infinidad de valores del ángulo θ que satisfacen $a = |z|\cos(\theta)$ y $b = |z|\operatorname{sen}(\theta)$, y que todos ellos difieren en un múltiplo de 2π. Por ello se suele distinguir al número θ (que es igual a $arctan(b/a)$, si el valor $arctan(b/a)$ está definido), que está en el intervalo

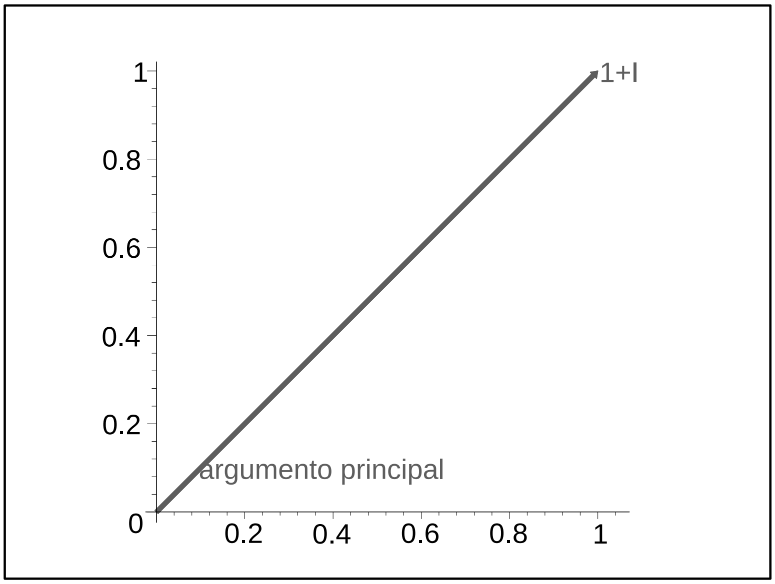

Figura 4.2: Módulo y argumento de un número complejo

$(-\pi,\, \pi]$ y que satisface dichas igualdades. A ese número se le denomina **argumento principal de z.**

Ejemplo 4.3.1 *En la figura (4.2) se indica el argumento principal, $\theta = \frac{\pi}{4}$, y el módulo, $|z| = \sqrt{2}$, del número $z = 1 + i$.*

Puesto que cualquier complejo z no nulo viene determinado por su módulo y su argumento, a dichos valores se les denomina **coordenadas polares**, $z = (|z|, \theta)$ del número complejo dado, o también **forma polar** del número complejo.

Ejemplo 4.3.2 *Expresar en forma binómica y polar los siguientes números complejos: $z_1 = (1, -1)$, $z_2 = (3, -2)$, $z_3 = (1, 1)$, $z_4 = (0, -4)$.*
Forma binómica $z = a + i\,b$:

$$z_1 = 1 - i,\; z_2 = 3 - 2\,i,\; z_3 = 1 + i,\; z_4 = -4\,i$$

Forma polar $(|z|, \theta)$:

$$\begin{aligned} z_1 &= (\sqrt{2},\, -\frac{1}{4}\,\pi), \quad z_2 = (\sqrt{13},\, -\arctan(\frac{2}{3})), \\ z_3 &= (\sqrt{2},\, \frac{1}{4}\,\pi), \qquad z_4 = (4,\, -\frac{1}{2}\,\pi). \end{aligned}$$

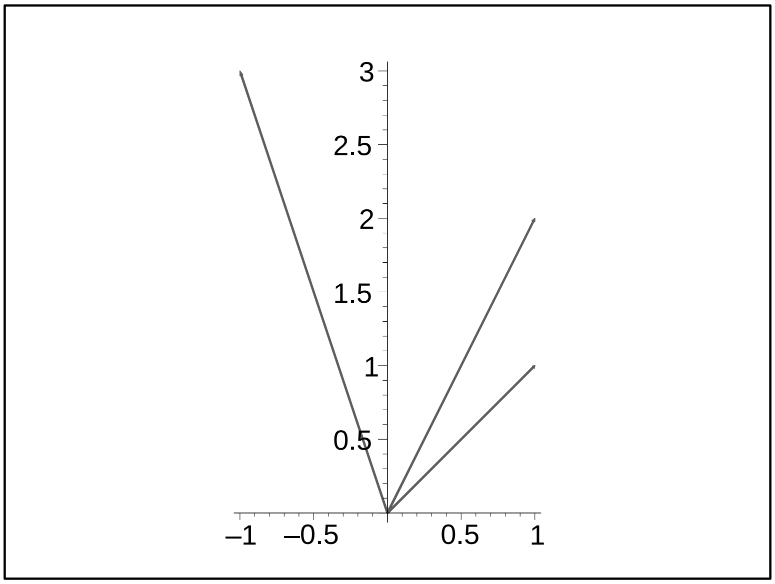

Figura 4.3: Producto de números complejos

Todo número complejo z no nulo se puede expresar en **forma trigonométrica:** $z = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, donde $r = |z|$ y θ es el argumento de z.

Sean $z1 = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ y $z2 = s\,(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ dos números complejos en forma trigonométrica. El **producto** $z1\,z2$ es el número complejo

$$\begin{aligned} z1\,z2 &= r\,s\,(\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) + i\sin(\theta)\cos(\phi) + i\cos(\theta)\sin(\phi)) = \\ &= r\,s\,(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)). \end{aligned}$$

que tiene módulo igual a $r\,s$ y argumento igual (utilizando algunas identidades trigonométricas) a $\theta + \phi$.

Ejemplo 4.3.3 *Podemos comprobar gráficamente (ver figura (4.3), donde* $z1 = 1 + i$, $z2 = 1 + 2\,i$, *y* $z1\,z2 = -1 + 3\,i$*) que el número complejo resultado de multiplicar dos números complejos es el que tiene como módulo el producto de los módulos y como argumento la suma de los argumentos de los dos complejos dados.*
A partir de aquí, está claro que multiplicar por un número complejo cuyo módulo sea igual a 1 es equivalente a "realizar un giro" en el plano en torno

al origen, de ángulo el argumento de dicho número complejo. Por ejemplo, multiplicar un número complejo por la unidad imaginaria (cuyo módulo es 1), es equivalente a realizar un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes en torno al (0,0).

Para calcular **la potencia entera de orden n** de z, donde n es un elemento de $\mathbb{Z}$, se utiliza la **fórmula de De Moivre:**

$$z^n = r^n\,(\cos(n\,\theta) + i\sin(n\,\theta)).$$

Si $n > 0$, esta fórmula se obtiene simplemente multiplicando z por sí mismo n veces. Si $n = 0$, $z^0 = 1$ y si $n < 0$, la fórmula es una consecuencia de la identidad $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Por ejemplo, si $z = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$,

$$z^{-1} = \frac{1}{r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} = \frac{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}{r}$$

$$r^2\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = r^2\,(\cos(2\,\theta) + i\sin(2\,\theta))$$

$$\frac{1}{r^2\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2} = \frac{\cos(2\,\theta) - i\sin(2\,\theta)}{r^2}$$

Ejemplo 4.3.4 *Sea* $z = 3\,(cos(\frac{\pi}{3}) + i\,sin(\frac{\pi}{3}))$.
Entonces $z^3 = -27$ *y* $z^{-3} = \dfrac{-1}{27}$.

Otra forma de representar los números complejos es a partir de la definición de **exponencial de un número complejo** $z = a + bi$:

$$e^z = e^{(a+i\,b)} = e^a\,(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)).$$

Si $a = 0$, entonces $z = b\,i$ y se obtiene la identidad $e^{(i\,b)} = \cos(b) + i\sin(b)$. Por ejemplo, $e^{\frac{\pi}{2}\,i} = i$ y $e^{\frac{\pi}{4}\,i} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\,i\sqrt{2}$.
Entonces, si $z = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ es la forma trigonométrica del número complejo z, su **forma exponencial** será igual a $z = r\,e^{(i\,\theta)} = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, donde $r = |z|$ es su módulo y θ su argumento. Si $z = 3 - 5\,i$, entonces $r = \sqrt{34}$ y $\theta = -\arctan(\dfrac{5}{3})$. La forma exponencial de z es $\sqrt{34}\,e^{-i\,arctan(5/3)}$.

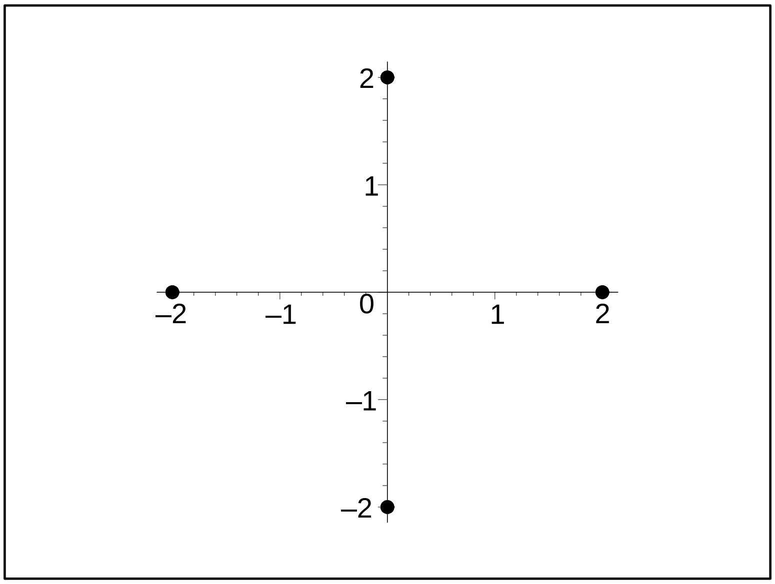

Figura 4.4: Raíces de un número complejo

El producto y las potencias enteras de números complejos en forma exponencial tienen expresiones muy sencillas: sean $z1 = r\, e^{(i\,\theta)}$ y $z2 = s\, e^{(i\,\phi)}$ dos números complejos. Entonces

$$\begin{aligned} &z1\, z2 = r\, s\, e^{(i\,(\theta+\phi))}, \\ &z1^{\,n} = r^n\, e^{n\, i\theta} \quad \text{así que} \\ &z1^{\,4} = r^4\, e^{4\, i\theta} \quad \text{y} \\ &z1^{\,-4} = r^{-4}\, e^{-4\, i\theta} \end{aligned}$$

Vamos ahora a ver cómo se resuelven **ecuaciones polinómicas** en el plano complejo. Para ello en primer lugar vamos a hallar y representar gráficamente todas las raíces (soluciones) de la ecuación $z^4 - 16 = 0$, que son 2, -2, $2\,i$, y $-2\,i$ (ver la figura (4.4)).

Nótese como las raíces están todas en el círculo centrado en el origen y de radio el (mismo) módulo.

El ejemplo anterior sirve para introducir el concepto de raíz de un número complejo. Dado un número complejo no nulo z, existen exactamente n números complejos $z_1 \cdots z_n$ tales que la potencia n-ésima de cada uno de ellos nos da como resultado el número complejo z. A dichos números complejos se les denomina **raíces n-ésimas de** z. Todos ellos tienen como módulo la raíz n-ésima del módulo de z y, siendo θ el argumento de z, sus argumentos satisfacen la relación

$$\theta_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n} \quad (k = 0, \cdots, n-1),$$

por lo que las flechas que las representan dividen el disco de radio $R = |z|^{(\frac{1}{n})}$ con centro en el origen en n sectores iguales.

Por ejemplo, las raíces cúbicas de $z = i \quad (\theta = \frac{\pi}{2}, |z| = 1)$ son números complejos de módulo 1 y $\theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2\,k\,\pi}{3} \quad (k = 0, \cdots, 2)$:

$$w_0 = cos(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$w_1 = cos(\frac{5\pi}{6}) + isen(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$w_2 = cos(\frac{3\pi}{2}) + isen(\frac{3\pi}{2}) = -i,$$

y dividen el disco de radio 1 en tres sectores iguales.

Ejercicios 4.3.1 *1) Calcular*

$$\frac{(3-2i)(2+3i)}{3-4i}, \quad (1+i)^4 \quad y \quad i^{5787}.$$

2) Expresar en forma polar el número complejo $z = 1 + i$ *y en forma binómica los números complejos de forma polar* $(2, \frac{\pi}{2})$ *y* $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

3) Determinar los números complejos z *tales que su cuadrado es igual a su conjugado.*

4) Hallar los números complejos z *tales que* $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

5) Los puntos (1,5) y (1,7) son vértices opuestos de un octógono regular. Calcular los restantes vértices de dicho octógono. (Sugerencia: trasladar el centro del octógono al origen de coordenadas.)

Capítulo 5

Sucesiones reales

En este capítulo vamos a introducir el concepto de límite de sucesiones reales, que será básico en el desarrollo de la asignatura y fundamental para el estudio de funciones reales. Empezamos por la definición de límites de sucesiones, para podernos acercar gradualmente al concepto más general de límite de una función, que es el contenido del siguiente capítulo 6.

La teoría de las sucesiones tiene gran importancia por sus aplicaciones y es la base de muchos métodos numéricos y del estudio de su convergencia o divergencia. Es también indispensable para poder comprender la teoría de las series númericas, que se desarrollará en la asignatura de Cálculo.

En particular, el estudio de las sucesiones definidas de forma recursiva y su convergencia tiene aplicaciones al estudio de la complejidad de algoritmos, desarrollado en la asignatura Matemática Discreta, y a los métodos exactos y numéricos de resoluciones de sistemas de ecuaciones differenciales que se emplearán en las asignaturas Álgebra y Cálculo.

5.1 Definición

Definición 5.1.1 *Una **sucesión de números reales** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$ *y cuyo codominio es el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$.

Entonces una sucesión es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asocia a cada $n \in \mathbb{N}$ un número real $a(n)$.
Las sucesiones suelen denotarse mediantes los siguientes símbolos: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}$, o (a_n).

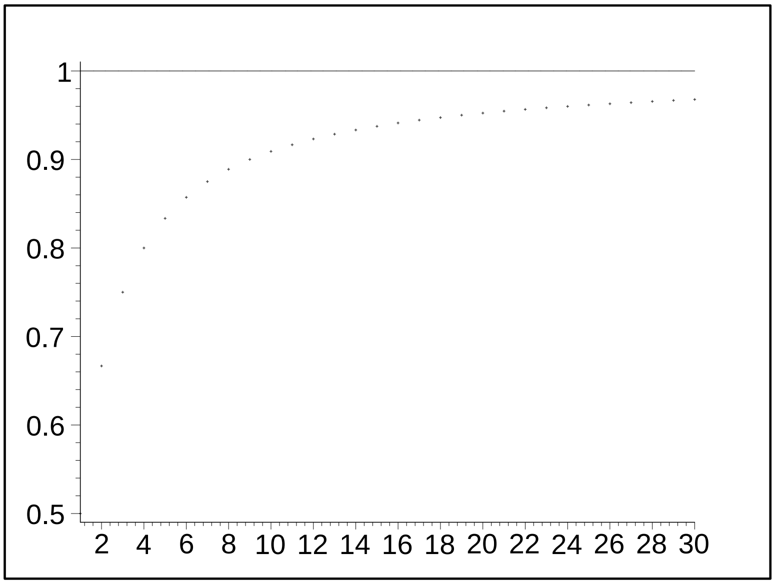

Figura 5.1: Gráfica de $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}\}$

Como se puede ver, para denotar la imagen $a(n)$ del elemento n se utiliza el símbolo a_n. A este número se le llama **término $n-$ésimo o general** de la sucesión. La notación (a_n) representa más claramente el hecho de que una sucesión no es igual a un simple conjunto (el conjunto imagen de la función a), sino que es un conjunto ordenado por los números naturales. Por ejemplo, una sucesión **constante** $\{4, 4, 4, 4, 4, \cdots\}$ es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $a(n) = 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la sucesión $\{4\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es igual al conjunto con un sólo elemento $\{4\}$.

5.1.1 Ejemplos

Vamos a ver varios ejemplos de sucesiones y distintas formas de definirlas.

Ejemplo 5.1.2 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n = \frac{n}{n+1}$. Los primeros términos de esta sucesión son $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots\}$. La figura (5.1) representa graficamente esta sucesión.*

Ejemplo 5.1.3 *Los primeros términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{(-1)^n\,(n+1)}{3^n}\}$ son $\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-4}{27}, \frac{5}{81}, \cdots\}$.*

Ejercicio 5.1.1 *Sean* $a_1 = \frac{3}{16}, a_2 = \frac{4}{25}, a_3 = \frac{5}{36}, a_4 = \frac{6}{49}$ *los primeros cuatro términos de una sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *¿Cuál es el siguiente término?*

En los ejemplos anteriores hemos definido nuestras sucesiones por medio de una fórmula. El próximo ejemplo ilustra como se puede definir una sucesión de **forma recursiva.**

Ejercicio 5.1.2 *Supongamos que los conejos no mueren nunca y que cada més cada pareja de conejos engendra una nueva pareja de conejos, que empieza a ser fértil al segundo més. Si empezamos con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos habrá en n meses, donde n es un número natural?.*

Ejemplo 5.1.4 *La sucesión* $\{f_n\}$ *de Fibonacci (hacia* $1175-1250$*) fue definida para estudiar la procreación de los conejos. Sus primeros dos términos son* $f_1 = 1$ *y* $f_2 = 1$. *Si* $n \geq 3$, *entonces el valor* f_n *se deduce de los valores* f_{n-1} *y* f_{n-2} *según la fórmula* $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. *Se sigue que* $\{f_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots\}$.

Ejemplo 5.1.5 ***Inversiones estatales*** *Un programa del gobierno que ha costado a los contribuyentes 5.000 millones de pesetas este año se va a recortar un 20 por 100 anual en los años venideros. Si queremos escribir una expresión para el coste de ese programa tras n años, podemos definir una sucesión de forma recursiva: tras 1 año el costo será*
$c_1 = 5.000 - \frac{20}{100}\,5.000 = (1 - \frac{20}{100})\,5.000 = \frac{4}{5}\,5.000 = 4.000$ *millones,*
tras 2 años será
$c_2 = 4.000 - \frac{20}{100}\,4.000 = \frac{4}{5}\,4.000 = (\frac{4}{5})^2\,5.000 = 3.200$ *millones,*
tras $n \geq 2$ *años será*
$c_n = c_{n-1} - \frac{20}{100}\,c_{n-1} = (1 - \frac{20}{100})\,c_{n-1} = \frac{4}{5}\,c_{n-1} = (\frac{4}{5})^n\,5.000$ *millones.*
Notar que el coste se acerca al valor cero, pero nunca será igual a ese valor...

Ejemplo 5.1.6 *Sea* A *un algoritmo que se aplica a una lista de números enteros y sea* $T(n)$ *la función que indica el número de operaciones que realiza el algoritmo actuando sobre una lista de tamaño* $n \geq 2$. *Supongamos que* $T(2) = 2$. *Aplicar el algoritmo a una lista de tamaño* $n \geq 3$ *consiste en hacerlo actuar sucesivamente sobre cada sublista de tamaño* $n-1$ *(hay n tales sublistas). Entonces se puede escribir que* $T(n) = n\,T(n-1)$ *y queda definida una sucesión de forma recursiva.*

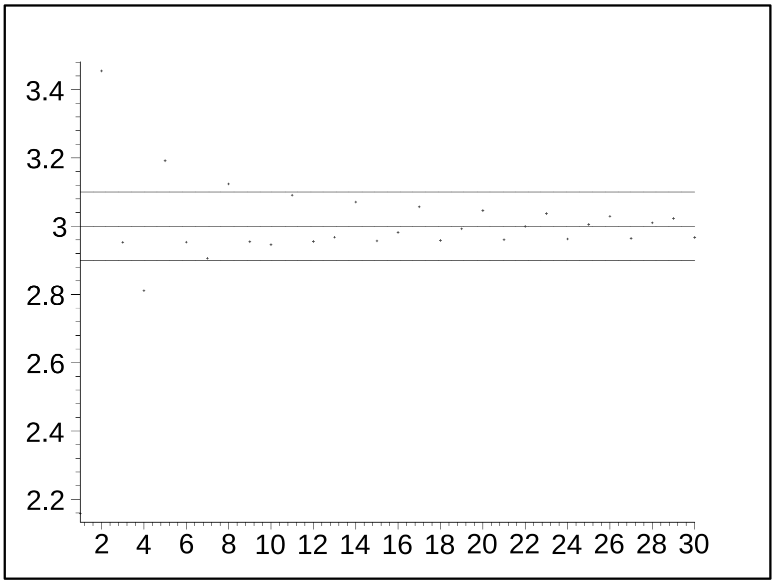

Figura 5.2: Límite de una sucesión

5.1.2 Límites y sus propiedades

Mirando a los ejemplos anteriores, ¿podemos adivinar cuáles serán los valores de las distintas sucesiones cuando n es muy grande?. La figura (5.1) nos indica que los valores de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{n}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se acercan a 1, los términos de la sucesión de Fibonacci son más y más grandes y el costo de la inversión estatal del ejemplo (5.1.5) disminuye año tras año.

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Si para valores de n suficientemente grandes, los correspondientes valores a_n se acercan a un valor L, es decir, si la distancia entre los números reales a_n y L es muy pequeña cuando n es grande, entonces, esta situación se podrá representar graficamente como en la figura (5.2). Si elegimos un entorno abierto de centro L y radio r, $I(L, r)$, tiene que existir un número natural $n(r)$, que depende del valor de r, tal que a partir de $n(r)$ (es decir, si $n \geq n(r)$), los números a_n estan todos en $I(L, r)$. En la figura (5.2), $L = 3$, $r = 0.1$ y $n(0.1) = 9$.

Definición 5.1.7 *(**Definición de límite**) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Un número real L es el **límite** de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \forall n \geq n(\epsilon), \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

Si L es el límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se dice que la sucesión ***converge*** *a L y se escribe $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.*
Si no existe ningun número real L tal que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, se dice que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ***divergente****.*

Observación 11 *Se sigue de la definición de límite que si L es un número real y queremos verificar que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene L como su límite, basta con encontrar un entorno $I(L,\epsilon)$ tal que para todo n existe siempre un número natural $m > n$ con $a_m \notin I(L,\epsilon)$.*

Ejemplos 5.1.8 *1) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Hemos visto que $inf(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$. Queremos verificar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: dado el entorno $I(0,\epsilon)$, tenemos que poder encontrar $n(\epsilon)$ tal que $\forall n \geq n(\epsilon) \quad |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$. La existencia de un tal $n(\epsilon)$ está garantizada por el corolario (3.4.7).*

2) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En este caso tenemos una sucesión ***oscilante****. Sus términos son siempre iguales a 1 o a -1. Esta sucesión es divergente ya que para todo número real L es siempre posible encontrar un entorno $I(L,r)$ tal que o bien 1, o bien -1, o bien los dos no pertenecen a $I(L,r)$.*

Ejercicio 5.1.3 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{n}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Verificar, utilizando la definición de límite, que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.*

Proposición 5.1.9 *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces su límite es único.*

Demostración Si existen dos límites L y M para una misma sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $L \neq M$, entonces la distancia entre L y M es un número positivo $d(L,M) = |L - M| = d > 0$. Se sigue que los intervalos abiertos $I(L,\frac{d}{2})$ y $I(M,\frac{d}{2})$ son disjuntos y ningún término de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede pertenecer a los dos intervalos al mismo tiempo. Por tanto L y M no pueden ser dos límites de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Propiedades de los límites de sucesiones

Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones reales tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = M$. Entonces

P1) (*Propiedad de linealidad*) Si x y y son dos números reales, la sucesión $\{x\,a_n + y\,b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} x\,a_n + y\,b_n = x\,L + y\,M$.

P2) (*Multiplicación*) La sucesión $\{a_n\, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, b_n = L\, M$.

P3) (*División*) Si para todo $n \in \mathbb{N}\quad b_n \neq 0$ y $M \neq 0$, la sucesión $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$.

P4) Si para todo $n \in \mathbb{N}\;\, a_n \geq 0$, entonces $L \geq 0$.
(L no puede ser negativo, ya que existiría un entorno abierto $I(L, r)$ de números negativos.)

P5) Si para todo $n \in \mathbb{N}\;\, a_n \geq b_n$, entonces $L \geq M$.
(Se sigue de la propiedad anterior aplicada a la sucesión $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.)

P6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.
(Se sigue de la desigualdad $||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$.)

Ejercicios 5.1.1 *1) Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $a_n = \frac{3n-2}{n}$.*

2) Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $a_n = \frac{3n^4+n-2}{-2n^4+5}$.

3) Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

4) Hallar un ejemplo de una sucesión convergente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}\;\, a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5) Definir un ejemplo de una sucesión divergente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente.

De las propiedades de las funciones logaritmo y exponencial, se pueden deducir las siguientes propiedades de límites:

P7) Sea $c > 0, c \neq 1$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \log_c(a_n) = \log_c(L)$.

P8) Sea $c > 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c^{b_n} = c^M$.

P9) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = L^M$.

Ejemplos 5.1.10 *1) Sea $a > 0$. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$.*

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{ln(\sqrt[n]{a})} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln(a)}{n}} = e^0 = 1.$

También, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1.$

2) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$. *Dividiendo en el numerador y en el denominador por* $\sqrt{n}$, *se obtiene que:*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{(n+\sqrt{n})}{n^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{(1/n+\sqrt{1/n^3})}}}.$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{(0+\sqrt{0})}}} = 1.$

Siendo toda sucesión una función, se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está **acotada** si existe un número real M tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

Proposición 5.1.11 *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Si $I(L, r)$ es un entorno de centro L y radio r, todos los términos de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, excepto por un número finito, están contenidos en $I(L, r)$, que es un intervalo acotado. Los demás términos de la sucesión forman un conjunto finito de números reales, que tiene un mínimo y un máximo. Entonces podemos encontrar una cota M para toda la sucesión.

□

Ejemplos 5.1.12 *1) La sucesión* $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada pero no es convergente.*
2) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por*

$$a_n = \begin{cases} n^2 & si\ 1 \leq n \leq 4, \\ \frac{1}{n} & si\ n \geq 5. \end{cases}$$

Hallar una cota para $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *donde* r *es un número real tal que* $r > 1$. *Vamos a verificar que* $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *no está acotada y, por tanto, es divergente.*
Si $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *fuese acotata por una constante positiva* M, *se tendría que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad r^n \leq M$. *Aplicando la función logaritmo neperiano a la última desigualdad se obtendría que* $n\, ln(r) \leq ln(M)$ *y que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq \frac{ln(M)}{ln(r)}$ *(notar que* $ln(r) > 0$*). Pero, por la propiedad de Arquímedes de* $\mathbb{N}$, *tiene que existir un número natural* $n(M)$ *tal que* $n(M) > \frac{ln(M)}{ln(r)}$. *(Para este* $n(M), \quad r^{n(M)} > M$.*)*

Observación 12 *El ejemplo 2) anterior ilustra una propiedad general de los límites. Si a partir de la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definimos una nueva sucesión* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, obtenida cambiando los primeros* k *términos de* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, por ejemplo,*

$$b_n = \begin{cases} sen(n) & si\ 1 \leq n \leq k, \\ \frac{1}{n} & si\ n \geq k+1, \end{cases}$$

la nueva sucesión tendrá el mismo límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Más en general, la convergencia de una sucesión a un límite* L *depende solamente de su comportamiento asintótico, es decir, de todos sus términos excepto los primeros* k *términos, por grande que sea* k*.*

5.1.3 Sucesiones propiamente divergentes

Entre las sucesiones divergentes, vamos a caracterizar las sucesiones que no admiten un número real como límite, pero tienen límite "igual a $\pm\infty$."

Ejemplo 5.1.13 *Por la propiedad de Arquímedes de* $\mathbb{N}$*, la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 2, 3 \cdots\}$ *es tal que, asignado un número real (positivo)* $C > 0$*, existe siempre* $n(C) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n(C), \quad a_n = n \geq n(C) > C$*. Igualmente, la sucesión* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, -2, -3 \cdots\}$ *es tal que, asignado un número real (positivo)* $C > 0$*, existe siempre* $n(C) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n(C), \quad b_n = -n \leq -n(C) < -C$*.*

Definición 5.1.14 *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales.*

1) Se dice que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es* ***propiamente divergente y tiende a*** ∞*,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$*, si para todo número real (positivo)* $C > 0$*, existe* $n(C) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n(C), \quad a_n > C$*.*

2) Se dice que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***propiamente divergente y tiende a*** $-\infty$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$*, si para todo número real (positivo)* $C > 0$*, existe* $n(C) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n(C), \quad a_n < -C$*.*

Ejemplos 5.1.15 *1) La sucesión de Fibonacci del ejemplo (5.1.4) tiene límite igual a* ∞*. (No es sencillo verificar directamente que esta sucesión no está acotada. Veremos que es monótona creciente y divergente y, por tanto, no puede estar acotada.)*

2) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{n^2-2}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Para verificar que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *utilizando la definición anterior, dado* $C > 0$*, hay que hallar* $n(C) \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n(C)$*, entonces* $\frac{n^2-2}{n} > C$*. Ahora*

$$\begin{aligned}
&\frac{n^2-2}{n} > C \Leftrightarrow n^2 - n\,C - 2 > 0 \\
&\Leftrightarrow (n - \frac{C+\sqrt{C^2+8}}{2})\,(n - \frac{C-\sqrt{C^2+8}}{2}) > 0 \\
&\Leftrightarrow n \in (-\infty, \frac{C-\sqrt{C^2+8}}{2}) \cup (\frac{C+\sqrt{C^2+8}}{2}, \infty).
\end{aligned}$$

Se sigue que si elegimos $n(C) > \frac{C+\sqrt{C^2+8}}{2}$*, para todo* $n \geq n(C)$ *se tendrá* $a_n = \frac{n^2-2}{n} > C$*.*

3) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, donde* r *es un número real tal que* $r > 1$ *como en el apartado 3) de los ejemplos (5.1.12). Hemos visto que si* $M > 0$*, entonces existe* $n(M) \in \mathbb{N}$ *tal que* $r^{n(M)} > M$*. Si ahora* n *es un número natural mayor que* $n(M)$*, se tendrá que* $r^n > r^{n(M)} > M$*. Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$*.*

5.1.4 Comparación de límites:

1) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

En particular, si $0 < r < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{r})^n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

2) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

3) Sea $L > 0$ y sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Ejemplos 5.1.16 *1)* $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{\pi}{5})^n = 0$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{5}{\pi})^n = \infty$.

2) Verificar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \infty$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\frac{1}{2}} = \infty$, *y que*
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$.
$\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \sqrt{n}$.
$\sqrt{n+\frac{1}{2}} > \sqrt{n}$.
Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\frac{1}{2}} = \infty$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$.

5.2 Sucesiones monótonas

Para una sucesión monótona (creciente o decreciente) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe un criterio de convergencia que nos permite averiguar si existe el límite, sin tener que calcularlo explícitamente.

Definición 5.2.1 *Una sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es*

- ***monótona creciente*** *si para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{n+1} \geq a_n$.
- ***monótona decreciente*** *si para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{n+1} \leq a_n$.

Ejemplos 5.2.2 *1)* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es decreciente.*
2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{n}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es creciente.*
3) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *no es monótona.*

Teorema 5.2.3 ***(Teorema de convergencia monótona)***
Una sucesión monótona es convergente si y sólo si está acotada. Además,

- *si* $a_{n+1} \geq a_n$ *es monótona creciente y acotada, entonces*
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.

- *si* $a_{n+1} \geq a_n$ *es monótona decreciente y acotada, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = inf(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.

La validez de este criterio se sigue de la completitud de $\mathbb{R}$ y de las propiedades básicas de los supremos e ínfimos.

Ejemplos 5.2.4 *1)* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene límite 0, igual a su ínfimo.*
2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{n}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene límite 1, igual a su supremo.*

El número e: el número e es, por definición, el límite de la sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La convergencia de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una de las aplicaciones más importantes del teorema de convergencia monótona: se puede verificar, por medio de la fórmula del binomio de Newton (5.1) y otros resultados elementales, que esta sucesión es creciente y que está acotada inferiormente por 2 y superiormente por 3.
Más en general, se verifica que

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}},$$

para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Es también importante notar que la convergencia de la sucesión de números racionales $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al número irracional e evidencia el carácter incompleto del conjunto $\mathbb{Q}$.
En el siguiente ejemplo se utiliza la definición de e para calcular el límite de una sucesión similar a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 5.2.5 *Hallar, si existe, el límite de la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(1+\frac{1}{n+2})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Escribimos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *como el cociente de dos sucesiones:*

$$(1+\frac{1}{n+2})^n = \frac{(1+\frac{1}{n+2})^{n+2}}{(1+\frac{1}{n+2})^2}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+2})^{n+2} &= \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = e, \quad y \\ \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+2})^2 &= 1. \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+2})^n = e$.

Ejercicio 5.2.1 *Hallar, si existe, el límite de las sucesiónes* $\{(1+\frac{1}{n})^{-5n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{(1+\frac{3}{n})^{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

El estudio de la convergencia de una sucesión es, en general, bastante más complejo si no tenemos una definición explícita de sus términos.
El siguiente ejemplo ilustra como utilizar el criterio de convergencia monótona para estudiar la convergencia de sucesiones definidas de forma recursiva.

Ejemplo 5.2.6 *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definida recursivamente por*

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+6) \quad si \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Los primeros términos de nuestra sucesión son:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 5,\ a_4 = 5.5,\ a_5 = 5.75,\ a_6 = 5.875, a_7 = 5.9375.$$

Para demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge y calcular su límite nos hace falta verificar que es monótona y que está acotada:*

- $\{\mathbf{a_n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ ***es creciente:***

  por inducción: $a_2 = 4 \geq a_1 = 2$ *y si* $a_{n+1} \geq a_n$, *entonces*

  $$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1}+6) \geq \frac{1}{2}(a_n+6) = a_{n+1}.$$

- $\{\mathbf{a_n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ ***está acotada superiormente por 6:***

  por inducción: $a_1 = 2 < 6$ *y si* $a_n < 6$, *entonces*

  $$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+6) < \frac{1}{2}(6+6) = 6.$$

- ***cálculo del límite:*** *sea* $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. *El método que vamos a utilizar para calcular el límite* L *se basa sobre la observación que si* $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, *entonces* $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ *(verificar):*

  $$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n+6) = \frac{1}{2}(L+6),$$

  Se sigue que $L - \frac{1}{2}L = 3$, *es decir, que* $L = 6$.

5.3 Primeros criterios de convergencia

Estudiar la convergencia de una sucesión por medio de la definición de límite y sus propiedades básicas no resulta en general muy efectivo. Hace falta desarrollar, igual que en el caso más general de límites de funciones reales del siguiente capítulo, unos criterios de convergencia y divergencia más sencillos de aplicar y más resolutivos.

Teorema 5.3.1 ***(Teorema del encaje o del sandwich)***
Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones tales que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n \leq c_n$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Entonces existen dos números naturales $n(\epsilon)$ y $m(\epsilon)$ tales que si n es un número natural mayor que ambos $n(\epsilon)$ y $m(\epsilon)$,

$$-\epsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \epsilon.$$

Se sigue que $|b_n - L| < \epsilon$. $\square$

Observación 13 *Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ya que,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -|a_n| \leq a_n \leq |a_n|.$$

Ejemplo 5.3.2 *Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.*
Vamos a utilizar la fórmula del binomio de Newton*:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \tag{5.1}$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.
Ya que $n \geq 1$, se verifica también que $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Entonces podemos escribir que $\sqrt[n]{n} = a + 1$, donde a es un número no negativo. Ahora,

$$\begin{aligned} n &= (\sqrt[n]{n})^n = (a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)^k\, (1)^{n-k} \\ &= 1 + n\,a + \frac{n(n-1)}{2}\, a^2 + \cdots \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}\, a^2. \end{aligned}$$

Se sigue que $n \geq 1+\frac{n(n-1)}{2}\,a^2$, *es decir, que* $n-1 \geq \frac{n(n-1)}{2}\,a^2$ *y, simplificando, que* $0 \leq a^2 = (\sqrt[n]{n}-1)^2 \leq \frac{2}{n}$. *Por el teorema del encaje,* $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^2 = 0$. *De este última identidad se sigue que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ejemplo 5.3.3 *Sea* r *un número real. Entonces la sucesión* $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es tal que*

$$\lim_{n\to\infty} r^n \quad \begin{cases} = 0 & si \quad |r| < 1, \\ = 1 & si \quad r = 1, \\ no\ existe & si \quad r = -1 \ o \ si \ |r| > 1. \end{cases}$$

Si $r = 1$, *la sucesión* $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es la sucesión constante igual a 1 y si* $r = -1$ *es la sucesión* $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $|r| < 1$, *la sucesión* $\{|r^n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0 *y la sucesión* $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *también convergerá a 0. Si* $|r| > 1$, *la sucesión* $\{|r^n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge propiamente y* $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *no puede estar acotada y, por tanto, también diverge.*

Ejercicios 5.3.1 *1) Calcular, si existe,* $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n}$.

2) Calcular, si existe, $\lim_{n\to\infty} \frac{n\cos(n)}{n^2+1}$.

3) Hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n}$.

Teorema 5.3.4 ***(Criterio del cociente)***
Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.
Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} = 0 & si \quad L < 1, \\ = \infty & si \quad L > 1. \end{cases}$$

Demostración Si $L < 1$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, \quad n \geq n(\epsilon)$,

$$-\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \epsilon - \epsilon a_n < a_{n+1} - La_n < \epsilon a_n(-\epsilon+L)a_n < a_{n+1} < (\epsilon+L)a_n < a_n,$$

donde en la última disegualdad hemos elegido ϵ tal que $\epsilon + L < 1$. Se sigue que para todo $n \geq n(\epsilon), \quad 0 < a_{n+1} < a_n$, es decir, que la sucesión es estrictamente decreciente. Por tanto converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = M \geq 0$.

Queda sólo verificar que $M = 0$. Pero M no puede ser positivo, ya que se tendría que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{M}{M} = 1,$$

y sabemos que $L < 1$.

El caso $L > 1$ se sigue del caso $L < 1$ aplicado a la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$: si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $L > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{L} < 1$. Por el caso anterior, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

Observación 14 *Si $L = 1$ el criterio del cociente no es conclusivo sobre la convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por ejemplo, las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifican la condición $L = 1$, pero una es convergente y la otra es divergente.*

Ejemplo 5.3.5 *Estudiar la convergencia de la sucesión $\{\frac{3^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

5.4 Subsucesiones

Hemos definido una sucesión como una función real cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. En esta sección veremos que se puede estudiar la convergencia de una sucesión dada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, simplemente mirando a sus restricciones (como función) sobre subconjuntos particulares del dominio $\mathbb{N}$.

Por ejemplo, a partir de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se pueden definir dos nuevas sucesiones, que son sus restricciones sobre el conjunto de los números naturales pares y impares, respectivamente. Estas dos restricciones son

$$\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 1, 1, \cdots\} \quad \text{y} \quad \{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, -1, -1, \cdots\}$$

y son claramente dos sucesiones convergentes: la primera converge a 1 y la segunda a -1.

Definición 5.4.1 *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión y sea* $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión estrictamente creciente de números naturales.*
Entonces queda definida una nueva sucesión $\{a_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$*, que se denomina* ***subsucesión*** *de* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplos 5.4.2 *1) Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{sen(\frac{(n-1)\,\pi}{2})\}_{n\in\mathbb{N}} =$
$= \{sen(0), sen(\frac{\pi}{2}), sen(\frac{3\,\pi}{2}), sen(2\,\pi), sen(\frac{5\,\pi}{2}), \cdots\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \cdots\}$.
Esta sucesión es oscilante y contiene las dos subsucesiones
$\{a_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 0, 0, \cdots\}$ *y*
$\{a_{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{4n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, -1, -1, \cdots\}$.

2) La sucesión $\{1, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 6, 7, 1, 8, 9, \cdots\}$ *contiene las subsucesiones* $\{1, 1, 1, 1, \cdots\}$ *y* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots\}$.

5.4.1 Criterio de divergencia basado en subsucesiones

El siguiente teorema nos proporciona un criterio de divergencia basado en subsucesiones.

Teorema 5.4.3 *Si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a un número real* L*, entonces toda subsucesión* $\{a_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L.

Demostración Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ y sea $\{a_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ya que L es el límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n(\epsilon)$, $|a_n - L| < \epsilon$. En particular, para todo $r_n \geq r_{n(\epsilon)}(\geq n(\epsilon))$ $|a_{r_n} - L| < \epsilon$. Se sigue que $L = \lim_{n\to\infty} a_{r_n}$. □

Entonces tenemos el siguiente **criterio de divergencia:** si queremos verificar que un número real L no es el límite de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, basta con encontrar una subsucesión $\{a_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no sea convergente o que tenga como límite un número distinto de L.

Ejemplos 5.4.4 *1) La sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, no puede converger a ningún número* L*, ya que las dos subsucesiones*

$$\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 1, 1, \cdots\} \quad y \quad \{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, -1, -1, \cdots\}$$

tiene límites distintos.

2) Las mismas conclusiones del ejemplo 1) valen para las sucesiones $\{sen(\frac{(n-1)\,\pi}{2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{1, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 6, 7, 1, 8, 9, \cdots\}$.

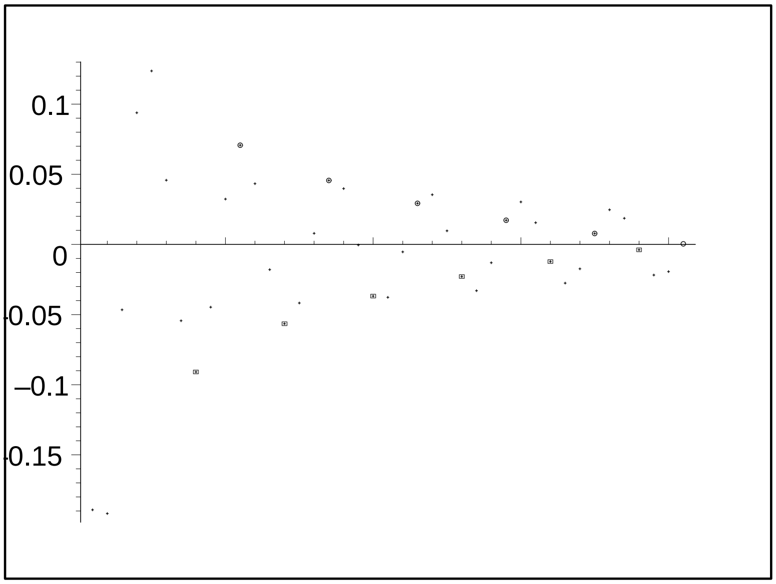

Figura 5.3: Dos subsucesiones monótonas de $\{\frac{sen(n)}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

5.4.2 Teorema de Bolzano-Weierstrass

El teorema de Bolzano-Weierstrass es un teorema de convergencia para subsucesiones de sucesiones acotadas. Su validez se sigue directamente de un teorema de existencia de subsucesiones monótonas.

Teorema 5.4.5 ***(Teorema de la subsucesión monótona)*** *Toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión monótona.*

Para tener una idea de por qué el teorema anterior es válido, miramos a la gráfica de una sucesión (no monótona), como es la sucesión $\{\frac{sen(n)}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, representada en la figura (5.3). En la figura se pueden reconocer dos subsucesiones monótonas: la primera es positiva y decreciente y la segunda es negativa y creciente.
Está claro que si la sucesión del teorema anterior está acotada, toda subsucesión monótona estará también acotada. Se sigue del teorema de convergencia monótona que

Teorema 5.4.6 ***(Teorema de Bolzano-Weierstrass)*** *Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.*

Ejemplos 5.4.7 *1) La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, está acotada y las dos subsucesiones monótonas (constantes)*

$$\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 1, 1, \cdots\} \quad y \quad \{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, -1, -1, \cdots\}$$

convergen.

2) La sucesión $\{sen(\frac{(n-1)\pi}{2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por 1 y sus subsucesiones monótonas tienen que ser convergentes.

3) La sucesión $\{1, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 6, 7, 1, 8, 9, \cdots\}$ no está acotada y contiene la sucesión monótona creciente $\{n\}$, que es propiamente divergente.

5.5 Criterio de Cauchy

El criterio de Cauchy para sucesiones reales consiste en la formulación de una condición equivalente a la condición de convergencia de una sucesión.

Definición 5.5.1 *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ si $n, m \geq n(\epsilon)$.*

De forma intuitiva, si n es grande, los términos de una sucesión de Cauchy se van reuniendo (ya que sus distancias relativas son más y más pequeñas) hasta confundirse.

Ejemplos 5.5.2 *1) La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy, ya que, por grande que sean n y m, la distancia entre a_n y a_m puede ser igual a 2.*

2) La sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, ya que $|a_n - a_m| = |\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}$, que es un número que puede ser arbitrariamente pequeño para n y m suficientemente grandes $(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0)$.

3) La sucesión $\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy, ya que si $m > n$, $|a_n - a_m| = |2^n - 2^m| = 2^n\,|1 - 2^{m-n}| \geq 2^n \geq 2$.

4) La sucesión $\{ln(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy, ya que para todo n, $|ln(2n) - ln(n)| = |ln(\frac{2n}{n})| = ln(2)$.

Como se puede intuir de los ejemplos anteriores, las sucesiones que convergen son también de Cauchy. Más importante es que las sucesiones de Cauchy son exactamente las sucesiones convergentes.

Teorema 5.5.3 ***(Criterio de Cauchy)*** *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Como aplicación del criterio de Cauchy, en la siguiente sección veremos que existe una clase de sucesiones, las sucesiones contractivas, que son sucesiones de Cauchy y, por tanto, convergen. Poder verificar la convergencia por medio de la condición de Cauchy es particularmente útil cuando no se tenga una expresión explícita de la sucesión en estudio, como para las sucesiones que son definidas de forma recursiva.

Ejemplo 5.5.4 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente como*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} \quad si \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Los primeros términos de la sucesión son

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \qquad a_2 = a_1 + \frac{1}{1} = 1 + 1, \\ a_3 &= a_2 + \frac{1}{2} = 1 + 1 + \frac{1}{2}, \qquad a_4 = a_3 + \frac{1}{3} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

No es difícil demostrar por inducción que $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ para todo $n \geq 1$. Si ahora calculamos el valor de $|a_n - a_m|$, con $n > m$, se obtiene que

$$|a_n - a_m| = |\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}| = |\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}|.$$

La última suma contiene $n-m$ términos que son todos mayores o iguales al término (el más pequeño) $\frac{1}{n-1}$. Se sigue que

$$|a_n - a_m| \geq \frac{n-m}{n-1}.$$

Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-m}{n-1} = 1$, si n es suficientemente grande el valor de $\frac{n-m}{n-1}$ estará próximo a 1 y, por tanto, será mayor que $\frac{1}{2}$. Entonces $|a_n - a_m|$ no podrá ser arbitrariamente pequeño y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser convergente, no siendo de Cauchy.

5.6 Sucesiones contractivas

Otra clase de sucesiones para las cuales la convergencia está garantizada es la clase de las sucesiones contractivas. Verificar la condición de que una sucesión sea contractiva resulta, a menudo, más fácil que estudiar directamente los términos de la sucesión en cuestión.

Definición 5.6.1 *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **contractiva** si existe una constante real C, $\mathbf{0 < C < 1}$, tal que para todo $n \geq 1$,*

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq C\,|a_{n+1} - a_n|. \tag{5.2}$$

De forma intuitiva y similar al caso de las sucesiones de Cauchy, las sucesiones contractivas son tales que la distancia entre un término y el sucesivo disminuye progresivamente (ya que $0 < C < 1$), hasta que todos los términos se confunden en el valor límite.

Ejemplo 5.6.2 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $|a_{n+2} - a_{n+1}| = |\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+1}}| = \frac{1}{2^{n+1}}\,|\frac{1}{2} - 1| = \frac{1}{2^{n+2}}$. Por otro lado, $|a_{n+1} - a_n| = |\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}| = \frac{1}{2^n}\,|\frac{1}{2} - 1| = \frac{1}{2^{n+1}}$. Se sigue que $|a_{n+2} - a_{n+1}| = \frac{1}{2}\,|a_{n+1} - a_n|$ y que, por tanto, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva con constante $C = \frac{1}{2}$.*

Teorema 5.6.3 *Toda sucesión contractiva es de Cauchy y, entonces, es convergente.*
Además, si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva con constante C y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, podemos estimar el error que se hace al aproximar L con los términos de la sucesión por medio de las siguientes fórmulas:

$$1)\ |L - a_n| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C}\,|a_2 - a_1|, \tag{5.3}$$

$$2)\ |L - a_n| \leq \frac{C}{1-C}\,|a_n - a_{n-1}|. \tag{5.4}$$

Ejemplo 5.6.4 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2 + \frac{1}{(a_n)^2} \quad si \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Vamos a verificar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva.

$$\begin{aligned} |a_{n+2} - a_{n+1}| &= |2 + \frac{1}{(a_{n+1})^2} - 2 - \frac{1}{(a_n)^2}| = |\frac{1}{(a_{n+1})^2} - \frac{1}{(a_n)^2}| = \\ &= \frac{|(a_n)^2 - (a_{n+1})^2|}{(a_n)^2(a_{n+1})^2} = \frac{|a_n - a_{n+1}|\,|a_n + a_{n+1}|}{(a_n)^2(a_{n+1})^2}. \end{aligned}$$

Se trata entonces de mayorar la expresión $\frac{|a_n + a_{n+1}|}{(a_n)^2(a_{n+1})^2}$ por medio de una constante C tal que $0 < C < 1$. Para encontrar C, se pueden estimar cotas *inferiores y superiores de* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *: para todo* $n \geq 2$,

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{(a_n)^2} > 2 \quad y \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{(a_n)^2} < 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Entonces,

$$\frac{|a_n + a_{n+1}|}{(a_n)^2(a_{n+1})^2} \leq \frac{|a_n| + |a_{n+1}|}{(a_n)^2(a_{n+1})^2} \leq \frac{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}}{4 \cdot 4} = \frac{9}{32} = C, \ y$$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{9}{32} |a_n - a_{n+1}|.$$

Se sigue que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es contractiva y converge a un límite* $L(> 0)$ *tal que* $L = 2 + \frac{1}{L^2}$. *La única solución real de la ecuación* $L = 2 + \frac{1}{L^2}$ *es*

$$L = \frac{1}{6} \, \frac{(172 + 12\sqrt{177})^{(2/3)} + 16 + 4\,(172 + 12\sqrt{177})^{(1/3)}}{(172 + 12\sqrt{177})^{(1/3)}}.$$

5.7 Resumen sobre convergencia y divergencia

Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Si $L \in \mathbb{R}$, se puede demostrar que $L = \lim_{n\to\infty} x_n$:

1. Utilizando la definición de límite: $\forall \epsilon > 0 \ \exists n(\epsilon)$ tal que $\forall n \geq n(\epsilon)$ $|x_n - L| < \epsilon$.
2. Si $\exists C > 0$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq M$ $|x_n - L| \leq C|a_n|$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
3. (Teorema del sandwich) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = L$ y $\forall n \geq 1$ $x_n \leq y_n \leq z_n$.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión, se puede demostrar que $\{x_n\}$ es convergente:

1. Si $\{x_n\}$ es suma, diferencia, producto o cociente (cuando tiene sentido) de sucesiones convergentes.

2. Si $\{x_n\}$ es la sucesión de las raíces cuadradas o de los valores absolutos de una sucesión convergente.

3. Si $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ (en este caso $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$).

4. (Criterio del cociente) Si $x_n > 0 \,\forall n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, (en este caso $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$).

5. Si $\{x_n\}$ es monótona y está acotada.
   ($\{x_n\}$ creciente y acotada $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = sup(\{x_n\})$ y
   $\{x_n\}$ decreciente y acotada $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = inf(\{x_n\})$)

6. (Criterio de Cauchy) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

7. Si $\{x_n\}$ es contractiva.

8. Si $\forall n \geq 1$ $x_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$ (en este caso $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$).

CRITERIOS DE DIVERGENCIA
Si $\{x_n\}$ es una sucesión y $L \in \mathbb{R}$, se puede demostrar que
$L \neq \lim_{n\to\infty} x_n$:

1. Utilizando la negación de la definición de límite:
   $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq m$ tal que $|x_n - L| \geq \epsilon_0$.

2. Si existe una subsucesión de $\{x_n\}$ convergente a un límite distinto de L.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión, se puede demostrar que $\{x_n\}$ es divergente :

1. Si la sucesión no está acotada.

2. Si la sucesión $\{|x_n|\}$ es divergente.

3. Si existen dos subsucesiones convergentes a límites distintos.

4. Si existe una subsucesión divergente.

5. Si x_n no es de Cauchy.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión, se puede demostrar que $\{x_n\}$ es **propiamente divergente**:

1. Si es creciente y no acotada.
2. Si $x_n > 0 \, \forall n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L > 1$.
3. Si es decreciente y no acotada.
4. Si $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ y $\forall n \geq 1$ $x_n \geq y_n$.
5. Si $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ y $\forall n \geq 1$ $x_n \leq y_n$.
6. Si $\forall n \geq 1$ $x_n > 0$, $y_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, verificando que $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = L > 0$ o que $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = M > 0$.
7. Si $\forall n \geq 1$ $x_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Nota: existen varios criterios de convergencia que son consecuencia de los criterios presentados en este capítulo y que el alumno puede encontrar en la referencias contenida en la bibliografía de estos apuntes.

Capítulo 6

Límites de funciones reales

El concepto de límite de una función real es una generalización del concepto de límite de una sucesión real cuando n tiende a ∞. Por esta razón muchos de los resultados que se presentan en este capítulo son la extensión de resultados vistos en el capítulo anterior y se basan sobre ellos.

6.1 Definición de límite y ejemplos

Si f es una función real, queremos definir definir el valor límite de $f(x)$ cuando x es un punto de su dominio que se acerca a un valor dado a. El punto a en general no debe necesariamente pertenecer al dominio de f. Lo que interesa es estudiar cómo se comporta f en puntos de su dominio cercanos al punto a. De esta manera se hablará de **propiedades locales** de la función f en un conjunto del tipo $I(a,r) \setminus \{a\} = (a-r,a) \cup (a,a+r)$, donde r es un número positivo, es decir, cuando se consideren puntos próximos al punto a. De forma similar, si estamos estudiando el límite de una función en el infinito (positivo o negativo), nos interesa estudiar la función f en intervalos del tipo (b,∞) o $(-\infty,b)$, respectivamente, donde b es un número real.

Ejemplo 6.1.1 *Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Su dominio es el conjunto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si estamos interesados en estudiar esta función en el punto 0, su representación gráfica en la figura (6.1) nos hace pensar que los valores $f(x)$, cuando x está cerca de 0, son muy distintos si x es positivo o negativo y, en ambos casos, son valores que no podemos acotar cuando x tiende a 0.*
Si queremos estudiar el límite de f en un punto de su dominio, por ejemplo en el punto $a = \frac{1}{2}$, entonces tenemos que observar los valores $f(x)$ cuando x

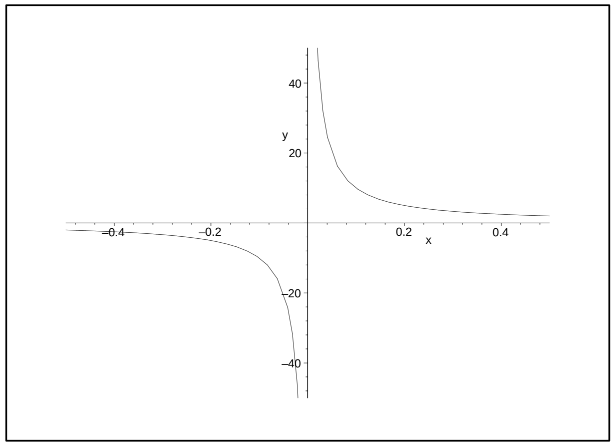

Figura 6.1: Límite de $f(x) = \frac{1}{x}$ en 0.

pertenece a un conjunto $I(\frac{1}{2}, r) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, *donde* r *es un número positivo.*
Finalmente, si queremos estudiar el límite de f *cuando* x *tiende a* ∞ *o a* $-\infty$, *entonces los valores* $f(x)$ *que nos interesan están en intervalos del tipo* (b, ∞) *o* $(-\infty, b)$, *respectivamente, donde* b *es un número real.*

Entonces hace falta definir en qué puntos tiene sentido calcular el límite de una función y qué es exactamente el límite de una función.

Definición 6.1.2 *Sea* A *un subconjunto de los números reales. Un punto* $x \in \mathbb{R}$ *es un* ***punto de acumulación*** *de* A *si para todo* $\delta > 0$, *existe un elemento* a *de* A *tal que* $a \in I(x, \delta) \setminus \{x\}$.

Ejemplos 6.1.3 *1)* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $0, 1$ *son puntos de acumulación del intervalo* $(0, 1)$.
2) 0 *es un punto de acumulación del conjunto de los valores de la sucesión* $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3) El conjunto $\mathbb{N}$ *de los números naturales no tiene ningún punto de acumulación.*
4) Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. *Entonces todo punto del intervalo* $[0, 1]$ *es de acumulación para* A.

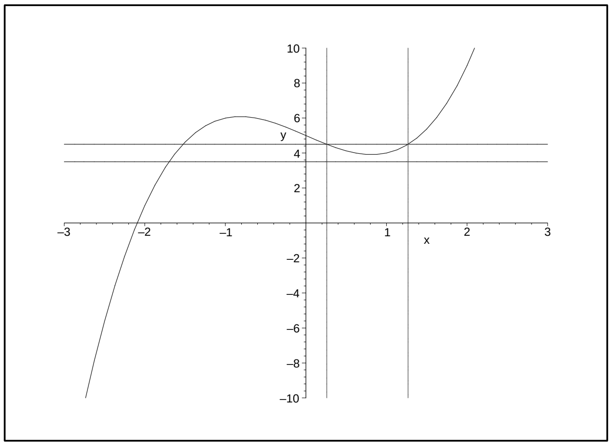

Figura 6.2: Límite de $f(x) = x^3 - 2x + 5$ en 1.

5) Si A es un conjunto finito, entonces no tiene puntos de acumulación.

Proposición 6.1.4 *Un punto $a \in \mathbb{R}$ es de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de A tal que*

- *para todo $n \geq 1$, $\qquad a_n \neq a$,*
- *$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Esta proposición es una consecuencia directa de la definición de punto de acumulación de un conjunto A y de límite de una sucesión.

Vamos ahora a definir el concepto de límite de una función en un punto.

Definición 6.1.5 *(**Definición $\epsilon-\delta$ de límite**) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea a un punto de acumulación de A. Entonces, un número real L es el límite de $f(x)$ en a, $\quad L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$x \in (A \setminus \{a\}) \cap I(a, \delta(\epsilon)) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I(L, \epsilon).$$

Es decir, si x es un punto de A distinto de a y contenido en un entorno abierto de centro a y radio $\delta(\epsilon)$, la imagen de x, $f(x)$, es un punto del entorno abierto de centro L y radio ϵ.

En la figura (6.2) se representa la función $f(x) = x^3 - 2x + 5$. El límite de $f(x)$ en el punto $a = 1$ es $L = 4$. Asignado el valor $\epsilon = 0.5$ se puede encontrar un entorno abierto de 1 tal que la restricción de f a este entorno de 1 tiene valores entre $4 - \epsilon = 3.5$ y $4 + \epsilon = 4.5$.

Ejemplos 6.1.6 *1) Si $f(x) = c$ es una función constante en $\mathbb{R}$, está claro que su límite en todo punto a es siempre igual a c.*

2) Si $f(x) = x$ en $\mathbb{R}$, entonces para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = a$. (En este caso, asignado $\epsilon > 0$, es suficiente elegir $\delta(\epsilon) = \epsilon$ en la definición de límite.)

Ejercicio 6.1.1 *Utilizando la definición de límite, verificar que*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2.$$

Como para límites de sucesiones (ver proposición (5.1.9)), si el límite de una función en un punto existe, entonces es único.

Proposición 6.1.7 *Si $f : A \to \mathbb{R}$ tiene límite en un punto a de acumulación de A, entonces este límite es único.*

La demostración de esta proposición es muy similar a la demostración de la proposición (5.1.9): si L y M son dos límites distintos de f en a, existen dos entornos abiertos disjuntos de L y de M. Por tanto uno de los dos números no puede ser el límite de f en a.

6.2 Criterios de convergencia

En esta sección vamos a emplear los resultados vistos para sucesiones de números reales en el contexto de límites de funciones.

Para límites de funciones vale un resultado del todo similar a la proposición (5.1.11). Si f tiene límite en un punto a, entonces f es **localmente acotada**, es decir, existe un entorno abierto $I(a, r)$ de centro a y radio $r > 0$ tal que la restricción de f a este entorno es una función acotada (existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I(a, r)$.)

Proposición 6.2.1 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función que tiene límite en un punto a de acumulación de A, entonces f está acotada en un entorno abierto de a.*

La demostración de esta proposición se sigue de la definición de límite: si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, y $\epsilon > 0$, entonces la restricción de f al entorno abierto $I(a, \delta(\epsilon))$ tiene imagen contenida en el entorno $I(L, \epsilon)$. Por tanto f es localmente acotada.

Ejemplo 6.2.2 *La proposición anterior se puede utilizar como un primer* ***criterio de divergencia*** *para funciones. Si sabemos que una función f no está acotada en ningún entorno de un punto a de acumulación de su dominio, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ de la figura (6.1) no está acotada en ningún entorno abierto del punto 0. En efecto sea $M > 0$, y sea 0, $\quad I(0, \delta) = (-\delta, \delta)$, un entorno cualquiera de 0. Por la propiedad de Arquímedes de $\mathbb{N}$ se puede siempre encontrar un número natural n tal que $n > M$ y $0 < \frac{1}{n} < \delta$. Entonces $f(\frac{1}{n}) = n > M$, y M no puede ser una cota para la restricción de f al entorno $I(0, \delta)$.*

Teorema 6.2.3 ***(Criterio de convergencia basado en sucesiones)*** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función, a un punto de acumulación de A y L un número real. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, la sucesión $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.*

Del teorema anterior se sigue inmediatamente el siguiente criterio de divergencia.

Teorema 6.2.4 ***(Criterio de divergencia basado en sucesiones)*** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función, a un punto de acumulación de A y L un número real. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, pero la sucesión $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a L.*

Observación 15 *Por el criterio anterior, $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ si existen dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen al punto a, pero son tales que las sucesiones $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f(b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a límites distintos.*

Ejemplos 6.2.5 *1) Verificar que* $\lim\limits_{x\to 1} ln(x) = 0$.
Vamos a utilizar el criterio de convergencia basado en sucesiones. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $A \setminus \{a\} = (0,\infty)\setminus\{1\}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} ln(a_n) = ln(\lim_{n\to\infty} a_n) = ln(1) = 0.$$

Se sigue que $\lim\limits_{x\to 1} ln(x) = 0$.

2) Sea $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 1, \\ x+1 & si \quad x > 1. \end{cases}$$

Queremos verificar si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. *Ya que los valores* $f(x)$ *son estrictamente menores que 1 si* $x < 1$ *y estrictamente mayores que 2 si* $x > 1$, *utilizamos el criterio de divergencia basado en sucesiones para demostrar que* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *no existe. Por tanto, hace falta definir una sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, *pero la sucesión* $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *no converge.*

Sea $a_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & si\ n\ es\ impar, \\ 1-\frac{1}{n} & si\ n\ es\ par. \end{cases}$ *Entonces*

$f(a_n) = \begin{cases} f(1+\frac{1}{n}) = 2+\frac{1}{n} & si\ n\ es\ impar, \\ f(1-\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n} & si\ n\ es\ par. \end{cases}$

Se sigue que $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *contiene dos subsucesiones,* $\{f(a_{2n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{f(a_{2n-1})\}_{n\in\mathbb{N}}$, *que tienen límites distintos. Por tanto,* $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge y* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *no existe.*

*3)**(Función de Dirichlet)** Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función característica de los números racionales, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Vamos a verificar, por medio del criterio de divergencia basado en sucesiones, que ésta función no tiene límite en ningún punto *a de la recta real.*
Por el teorema de densidad de $\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{R}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existe un número racional* r_n *tal que* $a < r_n < a + \frac{1}{n}$.
Por el teorema de densidad de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{R}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existe un número irracional* s_n *tal que* $a < s_n < a + \frac{1}{n}$.

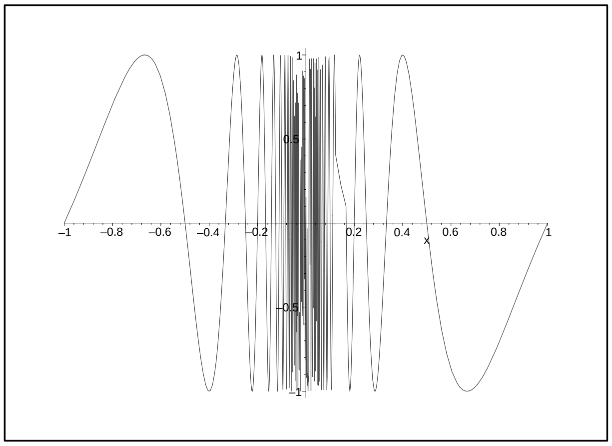

Figura 6.3: $f(x) = sen(\frac{\pi}{x})$.

Por el teorema del sandwich, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. *Se sigue que (verificar) la sucesión definida por* $a_n = \begin{cases} r_n & \text{si } n \text{ es impar,} \\ s_n & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$ *es tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *pero*

$$f(a_n) = \begin{cases} f(r_n) = 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ f(s_n) = 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Por tanto, la sucesión $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge y* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *no existe.*

4) En la figura (6.3) está representada la gráfica de la función $f(x) = sen(\frac{\pi}{x})$ *en un entorno de* 0. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{2}{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *pero la sucesión* $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f(\frac{2}{2n+1})\}_{n\in\mathbb{N}} = \{sen(n\pi + \frac{\pi}{2})\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots\}$ *no es convergente. Se sigue que* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *no existe.*

Como consecuencia del criterio de convergencia basado en sucesiones se pueden verificar inmediatamente las siguientes propiedades de los límites de funciones.

Propiedades de los límites de funciones

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones reales tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, donde a es un punto de acumulación de A. Entonces

P1) (*Propiedad de linealidad*) Si r y s son dos números reales, la función $(r\,f+s\,g)(x) = r\,f(x)+s\,g(x)$ tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a}(r\,f+s\,g)(x) = r\,L+s\,M$.

P2) (*Multiplicación*) La función $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$ tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a}(f\,g)(x) = L\,M$.

P3) (*División*) Si para todo $x \in A \quad g(x) \neq 0$ y $M \neq 0$, la función $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{L}{M}$.

P4) Si para todo $x \in A \;\; f(x) \geq 0$, entonces $L \geq 0$.
(L no puede ser negativo, ya que existiría un entorno abierto $I(L,\epsilon)$ de números negativos.)

P5) Si para todo $x \in A \;\; f(x) \geq g(x)$, entonces $L \geq M$.
(Se sigue de la propiedad anterior aplicada a la función $(f-g)(x)$.)

P6) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |L|$.
(Se sigue de la desigualdad $||f(x)|-|L|| \leq |f(x)-L|$.)

P7) Sea $c > 0, c \neq 1$. Si para todo $x \in A, \quad f(x) > 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \log_c(f(x)) = \log_c(L)$.

P8) Sea $c > 0$. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x\to a} c^{g(x)} = c^M$.

P9) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L^M$.

Ejemplos 6.2.6 *1) Por las propiedades P1), P2) y P3),* $\quad \lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4-2}{2x^2+1} = \frac{1}{3}$.

2) Para calcular $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x-4}$ *no podemos utilizar la propiedad P3) de los límites, ya que* $\lim\limits_{x\to 2} 2x-4 = 0$. *Pero podemos simplificar la expresión* $\frac{x^3-8}{2x-4}$ *: sea* $x \neq 2$ *un punto del dominio de* $\frac{x^3-8}{2x-4}$, *entonces*

$$\frac{x^3-8}{2x-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{2}.$$

Ahora, por la propiedad P3) $\quad \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x-4} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2} = 6$.

Ejercicios 6.2.1 *1) Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{3x-3} & si \quad x \neq 1, \\ -2 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

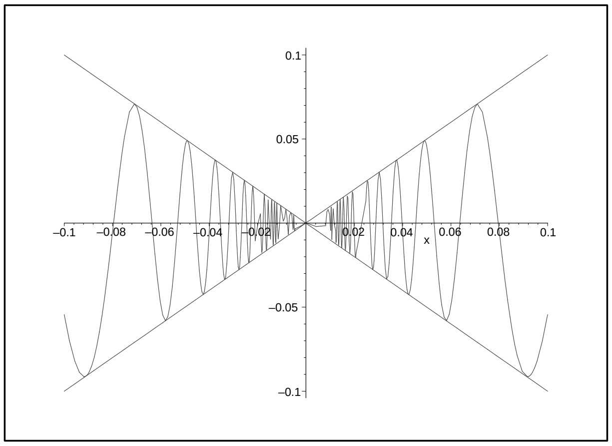

Figura 6.4: $f(x) = x\, sen(x)$.

Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2) Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

También el teorema del sandwich y el criterio de Cauchy para sucesiones tienen sus extensiones al caso de límites de funciones.

Teorema 6.2.7 ***(Teorema del encaje o del sandwich)***
Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ *y* $h : A \to \mathbb{R}$ *tres funciones reales tales que para todo* $x \in A$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, *donde* a *es un punto de acumulación de* A. *Entonces* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

Ejemplos 6.2.8 *1) La función* $f(x) = x\, sen(x)$ *(representada en la figura (6.4)) es tal que, para todo* $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| = |x|\,|sen(x)| \leq |x|,$$

es decir, $-|x| \leq f(x) \leq |x|$. *Ya que* $\lim\limits_{x\to 0} -|x| = \lim\limits_{x\to a} |x| = 0$, *por el teorema del sandwich se sigue que* $\lim\limits_{x\to 0} x\, sen(x) = 0$.

2) La función $f(x) = -x^2\, cos(20\,\pi\, x)$ es tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| = x^2\, |cos(20\,\pi\, x)| \leq x^2,$$

es decir, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. Ya que $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, por el teorema del sandwich se sigue que $\lim\limits_{x\to 0} -x^2\, cos(20\,\pi\, x) = 0$.

Definición 6.2.9 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea a un punto de acumulación de A. f verifica la **condición de Cauchy en** a si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $x, y \in I(a, \delta(\epsilon)) \setminus \{a\}$.*

Teorema 6.2.10 ***(Criterio de Cauchy)***
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea a un punto de acumulación de A. Entonces f tiene límite en a si y sólo si f verifica la condición de Cauchy en a.

Ejemplo 6.2.11 *Verificar que la función $f(x) = x^2$ es de Cauchy en $a = 0$. Sea $\epsilon > 0$. Tenemos que verificar que existe un entorno $I(0, \delta(\epsilon))$ tal que para todos $x, y \in I(0, \delta(\epsilon))$ se sigue que $|x^2 - y^2| < \epsilon$. Ahora,*
$|x^2 - y^2| \leq |x|^2 + |y|^2 < \delta(\epsilon)^2 + \delta(\epsilon)^2 = 2\,\delta(\epsilon)^2 < \epsilon$ *si* $0 < \delta(\epsilon) < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$.

6.3 Dos límites importantes

En esta sección vamos a calcular, como aplicación del teorema del encaje y utilizando algunas propiedades geométricas de las funciones trigonométricas, dos límites que resultan ser muy útiles:

$$\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{sen(x)}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1} \qquad \text{y} \qquad \lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{1 - cos(x)}}{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \tag{6.1}$$

(El cálculo de estos dos límites resulta más directo si se utiliza la regla de l'Hôpital, que estudiaremos en el capítulo 9.)

Ya que los límites que nos interesa calcular son límites en el punto $x = 0$, vamos a estudiar el entorno $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Además vamos a medir el ángulo agudo x *en radianes.*
En la figura (**??**) se puede ver que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$ y

$$1 = \frac{sen(x)}{sen(x)} < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tan(x)}{sen(x)} = \frac{1}{cos(x)}.$$

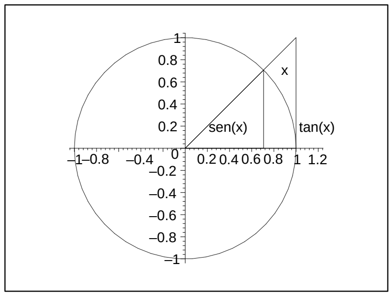

Figura 6.5: El ángulo x, $sen(x)$ y $tan(x)$.

De forma similar, si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, entonces $0 > sen(x) > x > tan(x)$ y,

$$1 = \frac{sen(x)}{sen(x)} < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tan(x)}{sen(x)} = \frac{1}{cos(x)}.$$

Se sigue que para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$

$$cos(x) < \frac{sen(x)}{x} < 1. \tag{6.2}$$

La primera consecuencia de las desigualdades (6.2) es que se puede aplicar el teorema del encaje para verificar que $\mathbf{\lim_{x \to 0} cos(x) = 1}$. En efecto, ya que para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$

$$0 \leq |cos(x) - 1| = 1 - cos(x) = 2\,[sen(\frac{x}{2})]^2 \leq 2\,(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2}, \tag{6.3}$$

se sigue que $1 - \frac{x^2}{2} \leq cos(x) \leq 1$. Siendo $\lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{2} = 0$, el teorema del encaje implica que $\lim_{x \to 0} cos(x) = 1$.

Vamos ahora a verificar que $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$. Por las desigualdades (6.2), para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$, $\quad cos(x) < \frac{sen(x)}{x} < 1$.
Siendo $\lim_{x \to 0} cos(x) = 1$, por el teorema del encaje $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

Finalmente, para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{x}$, observamos que las desigualdades (6.3) implican que $-\frac{x^2}{2} < cos(x) - 1 < 0$. Entonces

$$-\frac{x}{2} < \frac{cos(x) - 1}{x} < 0 \quad \text{si} \quad x > 0, \qquad \text{y}$$

$$0 < \frac{cos(x) - 1}{x} < -\frac{x}{2} \quad \text{si} \quad x < 0.$$

Ya que $\lim_{x \to 0} -\frac{x}{2} = 0$, por el teorema del encaje se sigue que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{x} = 0$.

Ejercicio 6.3.1 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{tan(x)}{x} \quad y \quad \lim_{x \to 0} \frac{sen(16x)}{2x}.$$

6.4 Límites laterales

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1, \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Verificamos en el ejemplo 2) (6.2.5) que esta función no tiene límite en el punto $a = 1$. Pero, si miramos a sus restricciones a los intervalos $[1, \infty)$ y $(-\infty, 1)$, obtenemos las dos funciones $f|_{[1,\infty)}(x) = x + 1$ y $f|_{(-\infty,1)}(x) = x$, respectivamente, que sí tienen límite en el punto 1 : $\lim_{x \to 1} x + 1 = 2$ y $\lim_{x \to 1} x = 1$.
Esta situación justifica la siguiente definición de límites laterales.

Definición 6.4.1 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $A \cap (a, \infty)$. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es el límite lateral* ***por la derecha*** *de f en a, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $0 < x - a < \delta(\epsilon)$.*
De forma similar, Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es el límite lateral ***por la izquierda*** *de f en a, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $0 < a - x < \delta(\epsilon)$.*

Los resultados de unicidad del límite y el criterio de convergencia basado en sucesiones tienen sus naturales correspondientes en el caso de límites laterales. Para el criterio de convergencia, las sucesiones que se pueden considerar son las que están contenidas en entornos a la derecha o a la izquierda del punto a.

La relación entre límites laterales y límites de una función en un punto a está dada por el siguiente teorema.

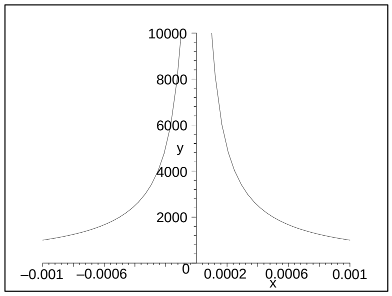

Figura 6.6: $f(x) = \frac{1}{|x|}$

Teorema 6.4.2 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de los dos conjuntos $(-\infty, a) \cap A$ y $(a, \infty) \cap A$. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$.*

Ejemplo 6.4.3 *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Entonces, $f(x) = 1$ si $x > 0$ y $f(x) = -1$ si $x < 0$. Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y f no tiene límite en $a = 0$.*

6.5 Límites infinitos y en el infinito

En analogía con el concepto de sucesión propiamente divergente, se puede definir el concepto de límite infinito de una función f en un punto a.
Por ejemplo, queremos poder afirmar que la función $f(x) = \frac{1}{|x|}$, representada en la figura (6.6), tiene límite igual a ∞ en el punto $a = 0$ y que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ de la figura (6.5) tiene, en el punto $a = 0$, límite lateral derecho igual a ∞ y límite lateral izquierdo igual a $-\infty$.

Definición 6.5.1 ***(Límites infinitos)*** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. La expresión $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ significa que para todo $C > 0$ existe $\delta(C) > 0$ tal que $f(x) > C$ si $x \in I(a, \delta(C)) \cap A$. De forma similar, la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ significa que para todo $C > 0$ existe $\delta(C) > 0$ tal que $f(x) < -C$ si $x \in I(a, \delta(C)) \cap A$.*

Las definiciones correspondientes para límites laterales infinitos se obtienen sustituyendo los intervalos $I(a, \delta(C))$ por semintervalos a la derecha o a la izquierda del punto a.

Si una función f tiene un límite lateral igual a infinito (o a menos infinito) en un punto a, entonces la recta vertical $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f.

Ejemplos 6.5.2 *1) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ de la figura (6.5) no tiene límite en el punto $a = 0$ y la función $f(x) = \frac{1}{|x|}$ tiene límite igual a ∞ en $a = 0$. Para la dos funciones la recta vertical $x = 0$ es una asíntota vertical.*

2) Sea $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$. El dominio de f es $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Simplificando la expresión $f(x)$, se obtiene que, si $x \neq -2, 2$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{x+2}.$$

Entonces

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{3}{2} \quad y$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty \quad y \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty.$$

La recta $x = 2$ no es una asíntota vertical, pero la recta $x = -2$ sí lo es.

Ejercicio 6.5.1 *Sea $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-1}$. Calcular los límites laterales de f en el punto $a = 1$ y verificar que la recta vertical $x = 1$ es una asíntota vertical de la función.*

Vamos ahora a estudiar la convergencia de una función f en el infinito, es decir, cuando su dominio contiene un intervalo no acotado y se consideran los valores $f(x)$ para x arbitrariamente grande en valor absoluto.

Definición 6.5.3 ***(Límites en el infinito)*** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea L un número real.*
Si A es un subconjunto no acotado superiormente, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $x \in (\delta(\epsilon), \infty) \cap A$.
Si A es un subconjunto no acotado inferiormente, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $x \in (-\infty, \delta(\epsilon)) \cap A$.

Si $\underset{x\to\infty}{\text{lím}} f(x) = L$ o si $\underset{x\to-\infty}{\text{lím}} f(x) = L$, la recta horizontal $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la función f.

Para límites de funciones en el infinito valen resultados análogos a los criterios de convergencia y divergencia basados en sucesiones (6.2.3) y (6.2.4).

Ejemplo 6.5.4 *Vamos a verificar que* $\underset{x\to\infty}{\text{lím}} \frac{1}{x} = 0$ *utilizando la definición de límite en el infinito y que* $\underset{x\to-\infty}{\text{lím}} \frac{1}{x} = 0$ *por medio del criterio de convergencia basado en sucesiones. Por tanto la recta* $y = 0$ *es una asíntota horizontal de la función* $f(x) = \frac{1}{x}$.
$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *es el dominio de* $f(x) = \frac{1}{x}$ *y no está acotado superiormente. Asignado un valor* $\epsilon > 0$, *tenemos que determinar un valor* $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x) - 0| = |\frac{1}{x}| < \epsilon$ *si* $x > \delta(\epsilon)$. *Pero* $|f(x) - 0| = |\frac{1}{x}| < |\frac{1}{\delta(\epsilon)}| < \epsilon$ *si* $x > \delta(\epsilon)$ *y hemos elegido* $\delta(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$.
Sea ahora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión cualquiera contenida en* $(-\infty, 0)$ *y tal que* $\underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, a_n = -\infty$. *Entonces* $\underset{n\to\infty}{\text{lím}} f(a_n) = \underset{n\to\infty}{\text{lím}} \frac{1}{a_n} = 0$.

Ejercicio 6.5.2 *Calcular* $\underset{x\to\infty}{\text{lím}} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ *y* $\underset{x\to-\infty}{\text{lím}} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$.
Sugerencia: $\sqrt{x^2} = |x|$, *entonces es igual a* x *si* $x > 0$ *y a* $-x$ *si* $x < 0$.
Las rectas $y = \underset{x\to\infty}{\text{lím}} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ *e* $y = \underset{x\to-\infty}{\text{lím}} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ *son dos asíntotas horizontales de* $f(x)$.

Finalmente, una función f, por ejemplo la función $f(x) = x^2$, puede tener límites infinitos en el infinito:

Definición 6.5.5 ***(Límites infinitos en el infinito)*** *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función.*
Si A *es un subconjunto no acotado superiormente,* $\underset{x\to\infty}{\text{lím}} f(x) = \infty$ *[o* $-\infty$*] si para todo* $C > 0$ *existe* $\delta(C) \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) > C$ *[o* $f(x) < -C$*] si* $x \in (\delta(C), \infty) \cap A$.
Si A *es un subconjunto no acotado inferiormente,* $\underset{x\to-\infty}{\text{lím}} f(x) = \infty$ *[o* $-\infty$*] si para todo* $C > 0$ *existe* $\delta(C) \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) > C$ *[o* $f(x) < -C$*] si* $x \in (-\infty, \delta(C)) \cap A$.

Observación 16 *Los resultados de comparación de límites de la sección (5.1.3) del capítulo 5 para sucesiones propiamente divergentes valen, con los cambios adecuados, para funciones que tienen límites infinitos en un punto.*

6.6 Infinitésimos e infinitos

A continuación se introducen una definiciones útiles a la hora de comparar límites de funciones, especialmente cuando se trate de formas indeterminadas del tipo $0/0$ o ∞/∞.

Definición 6.6.1 *Se dice que*

- *una función $f(x)$ es un* ***infinitésimo*** *en el punto $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$,*
- *una función $f(x)$ es un* ***infinito*** *en el punto $a \in \mathbb{R}$ si $\dfrac{1}{f(x)}$ es un infinitésimo en a, es decir, si $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$.*
- *dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ son* ***infinitésimos comparables*** *si existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.*

Definición 6.6.2 *(**Orden y equivalencia de infinitésimos**) Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos comparables en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se dice que*

- *$f(x)$ y $g(x)$ son* ***del mismo orden*** *en el punto $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,*
- *$f(x)$ es* ***de orden superior*** *que $g(x)$ en el punto $a \in \mathbb{R}$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Para indicar esta situación se utiliza la expresión $f(x) = o(g(x))$ en a y se lee: f(x) es "o pequeña" de g(x) en $x = a$.*
- *$f(x)$ y $g(x)$ son* ***infinitésimos equivalentes*** *en el punto $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y se escribe $f \sim g$, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Observación 17 *Como consecuencia de las definiciones anteriores, se tiene que*

- *$f(x) = o(1)$ significa que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.*

- $f(x) = o(x)$ *significa que* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

- *Si* $g(x)$ *es un infinitésimo en* a *y* $h(x)$ *es una función, una ecuación de la forma* $f(x) = h(x) + o(g(x))$ *significa* $f(x) - h(x) = o(g(x))$, *es decir,* $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - h(x)}{g(x)} = 0$.

Ejercicio 6.6.1 *1) Verificar que la relación* $\sim$ *entre infinitésimos en un punto* a *es una relación de equivalencia.*

2) Verificar que $sen(x) \sim x$ *en* $a = 0$ *y que* $1 - cos(x) = o(x)$. *(Ver la sección 6.3.)*

Después de haber estudiado la sección 9.2 del capítulo 9, que trata de la regla de l'Hôpital, resulatarán claras las siguientes equivalencias en $a = 0$:

- $sen(x) \sim x \sim arcsen(x)$,

- $tan(x) \sim x \sim arctan(x)$,

- $1 - cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$,

- $ln(1 + x) \sim x$,

- $c^x - 1 \sim xln(c) \qquad (c > 0)$.

Capítulo 7

Continuidad

7.1 Funciones continuas

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida en la sección (6.4) por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1, \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Vimos que $f(x)$ tiene límites laterales distintos en el punto $a = 1$ y que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 = f(1)$, pero $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq f(1)$. Por estas razones se dice que $f(x)$ no es continua en el punto 1.
Intuitivamente, una función continua es una función que tiene una gráfica "sin interrupciones": en cada punto de su dominio tiene límite y este límite es exactamente igual a su valor en ese punto.

7.1.1 Definición y ejemplos

Definición 7.1.1 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea a un punto de acumulación de A. Se dice que f es* ***continua en el punto*** *a si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $a \in A$,
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe,*
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si f es continua en todo punto a de A se dirá que f ***es continua en*** *A.*

Observación 18 *f es continua en $a \in A$ si y sólo si, por definición de límite, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$x \in (A \setminus \{a\}) \cap I(a, \delta(\epsilon)) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I(f(a), \epsilon).$$

También, f es continua en $a \in A$ si y sólo si , por el criterio de convergencia basado en sucesiones, para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $A\setminus\{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, la sucesión $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.

Ejemplos 7.1.2 *1) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en todos los puntos de su dominio. No puede ser continua en $a = 0$, ya que 0 no es un elemento de su dominio.*

2) La función de Dirichlet, ejemplo 3) (6.2.5), es un ejemplo de función tal que su dominio es todo $\mathbb{R}$, pero no es continua en ningún punto real ya que no tiene límite en ningún punto.

3) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0, \\ x\, sen(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

f está definida sobre $\mathbb{R}$ y tiene límite igual a $0 = f(0)$ en $x = 0$. Por tanto f es continua en 0. Notar que la función f se obtiene extendiendo la definición de la función $x\, sen(\frac{1}{x})$, cuyo dominio es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a una función cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. En este ejemplo la función resultante, la función f, resulta ser continua ya que su valor en 0 es igual al límite de $x\, sen(\frac{1}{x})$ (que existe y es finito) en el punto 0. La posibilidad de extender la función $x\, sen(\frac{1}{x})$ a una función continua se expresa diciendo que $x\, sen(\frac{1}{x})$ tiene una ***discontinuidad evitable en*** *0.*

4) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5 & si \quad x = 2, \\ \frac{1}{(x-2)^2} & si \quad x \neq 2. \end{cases}$$

f está definida sobre $\mathbb{R}$ y tiene límite igual a ∞ en el punto $a = 2$. En este caso, a partir de f no es posible, modificando el valor de f en el punto 2, definir una nueva función que sea continua en todo $\mathbb{R}$. Por esta razón se dice que ***la discontinuidad no es evitable en*** *$a = 2$.*

5) Sea f la función $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ con dominio $[-1,1]$. Para todo $a \in [-1,1]$ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 1 - \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{1-a^2} = f(a)$. Entonces f es continua en todo $[-1,1]$.

7.1.2 Propiedades de las funciones continuas

Como consecuencia de las propiedades de los límites de funciones (y de sucesiones) se obtienen las siguientes propiedades de las funciones continuas.

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en un punto $a \in A$. Entonces

C1) (*Propiedad de linealidad*) Si r y s son dos números reales, la función $(r\,f + s\,g)(x) = r\,f(x) + s\,g(x)$ es continua en a.

C2) (*Multiplicación*) La función $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$ es continua en a.

C3) (*División*) Si $g(a) \neq 0$ la función $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en a.

C4) (*Composición*) Sea f una función continua en a y sea h una función continua en $f(a)$. Entonces la función compuesta $h \circ f$ es continua en a. (Esta propiedad se verifica ya que $\lim_{x\to a} (h \circ f)(x) = h(\lim_{x\to a} f(x)) = h(f(a))$.)

C5) Si f es continua en a, entonces la función $|f|$ es continua en a.

C6) Sea $c > 0, c \neq 1$. Entonces la función $\log_c(x)$ es continua en $(0,\infty)$.

C7) Sea $c > 0$. Entonces la función c^x es continua en $\mathbb{R}$.

C8) Si $b \in \mathbb{R}$, la función x^b es continua en $(0,\infty)$.

C9) La función x^x es continua en $(0,\infty)$.

Ejemplos 7.1.3 *1) Las funciones polinomiales son funciones continuas en* $\mathbb{R}$.

2) Las funciones racionales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios son continuas en sus dominios.

3) Para verificar que la función $f(x) = cos(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, tendremos que utilizar la identidad trigonométrica

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sen(a)\,sen(b).$$

Hace falta verificar que si $a \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x\to a} cos(x) = cos(a)$. Ahora,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} cos(x) &= \lim_{x\to a} cos(x-a+a) = \\ &= \lim_{x\to a} cos(x-a)\,cos(a) - sen(x-a)\,sen(a). \end{aligned}$$

Ya que $\lim\limits_{x\to 0} cos(x) = 1$, *(como verificamos en la sección (6.5)), de la propiedad C4) se sigue que* $\lim\limits_{x\to a} cos(x-a) = 1$. *Ahora tenemos que calcular* $\lim\limits_{x\to a} sen(x-a)$. *Utilizando otra vez los resultados de la sección (6.5), podemos escribir que* $|sen(x)| \leq |x|$ *si* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Se sigue que* $\lim\limits_{x\to 0} sen(x) = 0$ *y, por C4),* $\lim\limits_{x\to a} sen(x-a) = 0$. *Finalmente,*

$$\lim_{x\to a} cos(x) = \lim_{x\to a} cos(x-a)\, cos(a) - sen(x-a)\, sen(a) = cos(a).$$

4) Ahora, para verificar que la función $sen(x)$ *es también continua en todo* $\mathbb{R}$ *basta con escribir que* $sen(x) = \sqrt{1 - cos(x)^2}$ *y aplicar las propiedades de las funciones continuas.*

Ejercicios 7.1.1 *Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:*

1) $f(x) = tan(x)$.

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & si \quad x \neq 1, \\ 4 & si \quad x = 1. \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & si \quad x \neq 1, \\ 6 & si \quad x = 1. \end{cases}$

7.2 Continuidad en intervalos

Las funciones continuas que están definidas sobre intervalos de la recta real tienen propiedades importantes. En particular, en esta sección se estudian los valores máximos y mínimos de funciones continuas definidas sobre intervalos cerrados y acotados y se aproximan raíces de funciones continuas en intervalos por el método de bisección.

7.2.1 Acotabilidad

Sea f la restricción de la función $\frac{1}{x}$ al intervalo $(0, 1]$. Está claro que f no está acotada superiormente y no tiene un valor máximo. Pero la restricción de $\frac{1}{x}$ a un intervalo cerrado y acotado cualquiera contenido en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tiene valores acotados por un valor máximo y un valor mínimo.

Teorema 7.2.1 *Sea* $I = [a, b]$ *un intervalo cerrado y acotado. Si una función* f *es continua en* I *entonces está acotada en* I.

Demostración Por contrapositivo: si f no está acotada en I, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un punto x_n del intervalo I tal que $|f(x_n)| > n$. Queda definida una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de I. Siendo I un intervalo acotado, también la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ estará acotada y, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, contiene una subsucesión $\{x_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un límite x. Además, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad a \leq x_{r_n} \leq b$, el punto x es un punto de I. Se sigue que los valores de f en los términos de la sucesión $\{x_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ son tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad |f(x_{r_n})| > r_n \geq n$. Por tanto la sucesión $\{f(x_{r_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge y f no puede ser continua en x. $\square$

Dada una función continua es a menudo importante determinar si esta función tiene un valor máximo o un valor mínimo. En los problemas de optimización donde se puede escribir un modelo matemático por medio de una función continua, es importante poder determinar si esta función tiene un valor máximo o mínimo. Un ejemplo podría ser el siguiente.

Ejemplo 7.2.2 *Una página rectangular ha de contener* $312\,cm^2$ *de texto, con márgenes superiores e inferiores de* $3\,cm$ *y laterales de* $4\,cm$. *¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?*
Se trata de definir la función "área de la página" y encontrar su valor mínimo. Si x *e* y *son las dimensiones de la altura y de la base del rectángulo que contiene el texto, entonces* $x\,y = 312$ *y las dimensiones de la página son* $x+6$ *e* $y+8$. *Por tanto el área de la página está dada por la función* $A(x,y) = (x+6)(y+8)$. *Ya que* $y = \frac{312}{x}$, *podemos escribir el área como función de una sóla variable:* $A(x) = (x+6)(\frac{312}{x}+8)$. *Siendo* x *necesariamente mayor que* 0, *la función* $A(x)$ *es una función continua y queremos calcular su valor mínimo.*

Definición 7.2.3 *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función. Se dice que* $a \in A$ *es un* ***máximo absoluto*** *de* f *en* A *si para todo* $x \in A$ $f(x) \leq f(a)$. *Se dice que* $a \in A$ *es un* ***mínimo absoluto*** *de* f *en* A *si para todo* $x \in A$ $f(x) \geq f(a)$.

Entonces un máximo absoluto a es un punto de A tal que $f(a)$ es el máximo del conjunto imagen de f, $\quad f(A)$, y un mínimo absoluto es un punto de A tal que $f(a)$ es el mínimo de $f(A)$.

Ejemplos 7.2.4 *1) Sea* f *la función* $f(x) = \frac{1}{x}$. *La imagen del intervalo* $(0, 100]$ *no tiene máximo (pero tiene mínimo), la imagen del intervalo*

$(100, 500)$ *tiene supremo e ínfimo (pero no tiene máximo y mínimo) y la imagen del intervalo* $[-50, -2]$ *tiene máximo y mínimo.*

2) Sea $f(x) = sen(x)$ *definida en el intervalo* $[0, 3\pi]$. *Entonces* $x = \frac{\pi}{2}$ *y* $x = \frac{5\pi}{2}$ *son dos puntos de máximo absoluto. El punto* $x = \frac{3\pi}{2}$ *es un mínimo absoluto.*

Si A es un intervalo cerrado y acotado, el teorema anterior implica que $f(A)$, siendo acotado, tiene un supremo y un ínfimo. El siguiente teorema afirma que estos valores del supremo e ínfimo son un máximo y un mínimo. En particular la función $A(x)$ del ejemplo (7.2.2) tendrá un valor mínimo si limitamos los valores de x a valores de un intervalo cerrado y acotado.

Teorema 7.2.5 ***(Teorema de Weierstrass)*** *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua, entonces* f *alcanza el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo* $[a, b]$.

Demostración Para demostrar este teorema se puede utilizar un procedimiento similar al que hemos empleado en la demostración del teorema anterior. Ya que $f(A)$ es un conjunto acotado, por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$ existen el supremo s y el ínfimo i de $f(A)$. Entonces se trata de verificar que s es un máximo y que i es un mínimo.
Siendo i el ínfimo de $f(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in f(A)$ tal que $i \leq y_n < i + \frac{1}{n}$. Por el teorema del encaje $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = i$. Se sigue que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[a, b]$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\quad f(x_n) = y_n$. Ya que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada (está contenida en $[a, b]$), por el teorema de Bolzano-Weierstrass contiene una subsucesión $\{x_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto x de $[a, b]$. Siendo f continua, necesariamente es $i = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{r_n}) = f(x)$. Por tanto x es un mínimo absoluto de f.
Para verificar que s es un máximo absoluto de f se emplea un procedimiento similar al anterior. □

7.2.2 Localización de raíces

Otra característica de una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es que si sus valores en los extremos tienen signos opuestos, entonces existe un punto del intervalo donde la función es igual a cero. En la figura

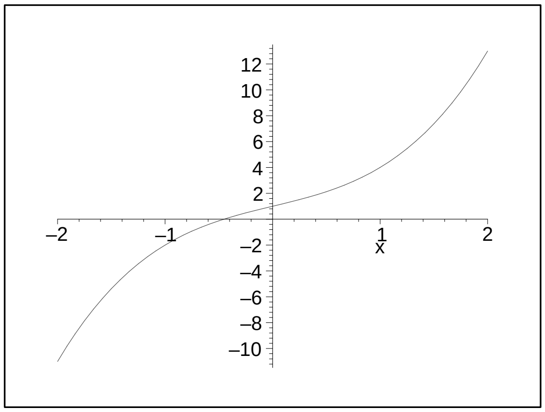

Figura 7.1: $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

(7.1) se puede ver el ejemplo de la función $f(x) = x^3 + 2x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$. Existe un punto x entre -2 y 2 tal que $f(x) = 0$, es decir, una raíz de f.

Para localizar la raíz de una función f continua en un intervalo $[a, b]$ se puede emplear el siguiente **método de bisección**.

Sin perder en generalidad, podemos suponer que, como en la figura (7.1), $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. La idea es construir una sucesión encajada de intervalos cerrados y acotados $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ sea una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Por tanto, los extremos de cada intervalo I_n son una aproximación de x que mejora cuando n crece.
Entonces definimos $I_1 = [a_1, b_1] = [a, b]$. Ahora, sea $x = \frac{a_1+b_1}{2}$ el punto medio de I_1. Si $f(x) = 0$, entonces x es la raíz buscada. Si $f(x) > 0$ se define $I_2 = [a_2, b_2] = [a_2, x]$. Si $f(x) < 0$ se define $I_2 = [a_2, b_2] = [x, a_2]$. En los dos casos $I_2 \subset I_1$ y la longitud de I_2 es la mitad de la longitud de I_2. Por medio de este proceso iterativo se consigue definir una sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} = [a_n, b_n]$ tal que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ y, por tanto, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$, donde $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ y $f(b_n) > 0$. Siendo f continua, $0 \geq f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) \geq 0$. Entonces $f(x) = 0$.

El método de bisección demuestra el siguiente teorema.

Teorema 7.2.6 ***(Teorema de la raíz)*** *Sea I un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$*

una función continua. Si existen dos puntos a y b en I tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo opuesto, entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = 0$.

Observación 19 *El método de bisección se puede utilizar como algoritmo para aproximar el valor exacto de una raíz x de una función continua en un intervalo $[a, b]$. La aproximación que se obtiene al paso n es el valor de a_n con un **error** $|x - a_n|$ tal que*

$$|x - a_n| < \frac{1}{2^n}(b - a).$$

Trabajaremos con distintos métodos de aproximación de raíces en la práctica 4 con Maple V.

Ejemplo 7.2.7 *Sea $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & si \quad 0 \leq x < 1, \\ ln(x) + 1 & si \quad 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

La función f no es continua en $[0, 3]$, $\quad f(0) = -2 < 0$ y $f(3) = ln(3)+1 > 0$. pero no existe ningún punto c entre 0 y 3 tal que $f(3) = 0$.

Ejercicios 7.2.1 *1) Sea $f(x) = 2sen(x) - \sqrt{3}$. Verificar que existe una raíz de f en el intervalo $(0, \pi)$.*

2) Hallar un intervalo que contenga una solución de la ecuación

$$x^3 + 1 = -3x.$$

Una generalización inmediata del teorema de la raíz es el siguiente teorema.

Teorema 7.2.8 ***(Teorema del valor intermedio de Bolzano)*** *Sea I un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que existen dos puntos a y b en I tales que $f(a) < f(b)$. Entonces para todo número real y tal que $f(a) < y < f(b)$ existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = y$.*

(El teorema del valor intermedio se obtiene aplicando el teorema de la raíz a la función continua $g(x) = f(x) - y$.)

Observación 20 *El teorema del valor intermedio tiene varias interesantes consecuencias:*

1) Si la función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces tiene un valor mínimo m y un valor máximo M. Por el teorema del valor intermedio, la función f alcanza en puntos de $[a, b]$ todo los valores intermedios entre m y M. Por tanto, se sigue también que $f([a, b]) = [m, M]$.

2) ***(Conservación de intervalos)*** *Más en general, si I es un intervalo cualquiera y f es una función continua en I, el conjunto imagen $f(I)$ es también un intervalo. (Esta propiedad se verifica fácilmente utilizando el hecho de que un subconjunto A de la recta real es un intervalo si y sólo si para todo par de puntos a y b de A tales que $a < b$, todo el intervalo cerrado $[a, b]$ está contenido en A.)*

Ejemplos 7.2.9 *1) La función de Dirichlet no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$. Tiene máximo igual a 1 y mínimo igual a 0 y la imagen del intervalo $[-1, 2]$ es el conjunto $\{0, 1\}$, que no es un intervalo.*

2) La función del ejemplo (7.2.7) no es continua en $[0, 3]$ y $f([0, 3])$ no es un intervalo.

3) Si $f : [0, 1] \to \mathbb{Q}$ es continua, entonces f tiene que ser constante.

7.3 Funciones monótonas e inversas

El resultado principal de esta sección es que una función continua y estrictamente monótona en un intervalo tiene una inversa continua definida sobre su imagen.

Definición 7.3.1 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$.*

- *f es* ***creciente [decreciente]*** *en A si para todo par x, y de elementos de A,*

$$x \leq y \quad \textit{implica} \quad f(x) \leq f(y) \quad [\, f(x) \geq f(y)].$$

- *f es* ***estrictamente creciente [estrictamente decreciente]*** *en A si para todo par x, y de elementos de A,*

$$x < y \quad \textit{implica} \quad f(x) < f(y) \quad [\, f(x) > f(y)].$$

Ejemplos 7.3.2 *1) La función $f(x) = x$ es estrictamente creciente y la función $f(x) = -x$ es estrictamente decreciente.*
Una función que es al mismo tiempo creciente y decreciente sobre un conjunto A tiene que ser constante.

2) La función

$$\begin{cases} x^2+5 & si \quad x>0, \\ 1 & si \quad x=0, \\ x & si \quad x<0 \end{cases}$$

es estrictamente creciente, además sus límites laterales en el punto $a = 0$ son

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = sup\{f(x) : x < 0\} \quad y \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5 = inf\{f(x) : x > 0\}.$$

El último ejemplo ilustra la siguiente propiedad de las funciones monótonas en intervalos:

Proposición 7.3.3 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea a un* punto interior *de I (un punto de un intervalo es un punto interior si existe un entorno abierto de centro a completamente contenido en el intervalo).*

- *Si f es decreciente en I, entonces $\lim_{x\to a^-} f(x) = inf\{f(x) : x \in I, x < a\}$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = sup\{f(x) : x \in I, x > a\}$,*
- *Si f es creciente en I, entonces $\lim_{x\to a^-} f(x) = sup\{f(x) : x \in I, x < a\}$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = inf\{f(x) : x \in I, x > a\}$.*

La proposición anterior implica el siguiente criterio de continuidad

Proposición 7.3.4 ***(Criterio de continuidad)*** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea a un* punto interior *de I.*

- *Si f es decreciente en I, entonces f es continua en a si y sólo si $inf\{f(x) : x \in I, x < a\} = f(a) = sup\{f(x) : x \in I, x > a\}$,*
- *Si f es creciente en I, entonces f es continua en a si y sólo si $sup\{f(x) : x \in I, x < a\} = f(a) = inf\{f(x) : x \in I, x > a\}$.*

Observación 21 *Si a es el extremo derecho [izquierdo] del intervalo I, el criterio de continuidad se puede enunciar como sigue:*

- *Si f es decreciente en I, entonces f es continua en a si y sólo si $inf\{f(x) : x \in I, x < a\} = f(a)$ [$sup\{f(x) : x \in I, x > a\} = f(a)$].*
- *Si f es creciente en I, entonces f es continua en a si y sólo si $sup\{f(x) : x \in I, x < a\} = f(a)$ [$inf\{f(x) : x \in I, x > a\} = f(a)$].*

Ejemplo 7.3.5 *La función*

$$\begin{cases} -x & si \quad -1 \leq x \leq 1, \\ -x-1 & si \quad 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

es estrictamente decreciente y no es continua en el punto interior $a = 1$ del intervalo $I = [-1, 2]$ ya que

$$inf\{f(x) : x \in I, x < 1\} = -1 = f(1) \neq -2 = sup\{f(x) : x \in I, x > 1\}.$$

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua estrictamente monótona (creciente o decreciente) entonces la imagen del intervalo I es un intervalo $f(I)$. Además la función f es una función inyectiva, ya que para funciones estrictamente monótonas $x \neq y \to f(x) \neq f(y)$. Por tanto la función $f : I \to f(I)$ es una función biyectiva y se puede definir su inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ que es también biyectiva.

Teorema 7.3.6 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$ continua y estrictamente decreciente [estrictamente creciente] en I. Entonces la función $f^{-1} : f(I) \to I$ es estrictamente decreciente [estrictamente creciente] y continua.*

Demostración Si f es estrictamente decreciente, tenemos que verificar que f^{-1} es estrictamente decreciente y continua.

f^{-1} es estrictamente decreciente: sean b_1 y b_2 dos elementos de $f(I)$ tales que $b_1 < b_2$. Entonces existen dos puntos a_1 y a_2 en I tales que $f(a_1) = b_1 < b_2 = f(a_2)$. Siendo f estrictamente decreciente tiene que ser $f^{-1}(b_1) = a_1 > a_2 = f^{-1}(b_2)$. Por tanto f^{-1} es estrictamente decreciente.

f^{-1} es continua: por reducción al absurdo, sea $b \in f(I)$ un punto de discontinuidad de f^{-1}. Siendo f^{-1} decreciente, puede pasar sólo una de las siguientes circunstancias:

1) $f^{-1}(b) < inf\{f^{-1}(y) : y \in f(I), y < b\}$: en este caso un punto a cualquiera en el intervalo $(f^{-1}(b), inf\{f^{-1}(y) : y \in f(I), y < b\}) \subseteq I$ no podría tener imagen contenida en $f(I)$ y ésto es imposible.

2) $f^{-1}(b) > sup\{f^{-1}(y) : y \in f(I), y > b\}$: en este caso un punto a cualquiera en el intervalo $(sup\{f^{-1}(y) : y \in f(I), y > b\}, f^{-1}(b)) \subseteq I$ no podría tener imagen contenida en $f(I)$ y ésto tampoco es posible.

Si f es estrictamente creciente la demostración es similar. $\square$

Acabamos este capítulo con un ejemplo que ilustra que una función $f : A \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona sobre un conjunto A que no es un intervalo puede tener una inversa discontinua.

Ejemplo 7.3.7 *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0,1), \\ x-1 & si \quad x \in [2,3]. \end{cases}$$

La función f es continua y estrictamente creciente en el conjunto $A = [0,1) \cup [2,3]$ e $Im(f) = [0,2]$. Sin embargo su inversa es la función

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & si \quad y \in [0,1), \\ y+1 & si \quad y \in [1,2] \end{cases}$$

que es discontinua en $y = 1$.

Capítulo 8

Derivación

El concepto de derivada de una función en un punto es una de las aplicaciones más importantes de la teoría de los límites.
Antes de la introducción del cálculo diferencial (es decir, del estudio de las derivadas de funciones) se podía estudiar el movimiento de un cuerpo sólo si su velocidad era constante y se podía definir la pendiente de una curva en un punto sólo si la curva era una recta. El concepto de recta tangente en un punto a una curva era conocido para una circunferencia (como recta perpendicular al radio por ese punto) pero no para curvas más generales.
En éste y en el siguiente capítulo vamos a estudiar las propiedades básicas de las funciones diferenciables y algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial.

8.1 Recta tangente y definición de derivada

Sea f una función real definida en un intervalo abierto $I = (a, b)$ y sea c un punto de I.
Si ahora x es un punto de (a, b) distinto de c, a la variación (incremento) $x - c$ le corresponde una variación (incremento) de los valores de la función $f(x) - f(c)$. Por ejemplo, en la figura (9.2) se puede observar la función $f(x) = x^4$ en un entorno del punto $c = 3$. Si $x = 5$, entonces $x - c = 5 - 3 = 2$ y $f(x) - f(c) = 5^4 - 3^4 = 625 - 81 = 544$. La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(c, f(c)) = (3, f(3))$ y $(x, f(x)) = (5, f(5))$ es igual a $m = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{544}{2} = 272$.
En general, si f es una función real definida en un intervalo abierto $I = (a, b)$

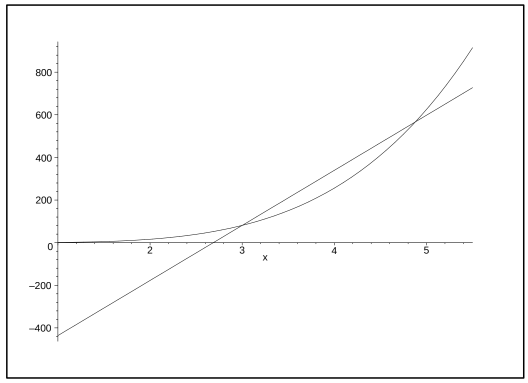

Figura 8.1: Una secante a la gráfica de $f(x) = x^4$.

y c, x son dos puntos de I, **la pendiente de la recta secante a la gráfica de f en los puntos** $P = (c, f(c))$ **y** $Q = (x, f(x))$ está dada por la fórmula

$$m = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = tg(\alpha_{PQ}), \tag{8.1}$$

donde $tg(\alpha_{PQ})$ es la tangente del ángulo α_{PQ} formado por la recta PQ y el eje de las x.

Ejemplos 8.1.1 *1) Si la función f es una recta, por ejemplo $f(x) = 3x - 2$, entonces para todo $c, x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) - f(c) = 3x - 2 - (3c - 2) = 3(x - c)$ y $m = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 3$: la pendiente de toda secante a la gráfica de f es igual a la pendiente de f, siendo toda secante igual a la gráfica de f.*

2) Si un cuerpo se mueve con desplazamiento dado por la función del tiempo (en minutos) $s(t) = t^2$, entonces el cociente de incrementos $m = \frac{s(t)-s(c)}{t-c} = \frac{t^2-c^2}{t-c} = t + c$ representa su velocidad media durante el intervalo de tiempo $t - c$. Para poder calcular la velocidad instantánea del cuerpo en el tiempo c hay que considerar valores de t arbitrariamente cercanos al valor c. Gráficamente esto se corresponde a estudiar rectas secantes a la gráfica de s en los puntos $(c, s(c))$ y $(t, s(t))$ cuando t tiende a c.

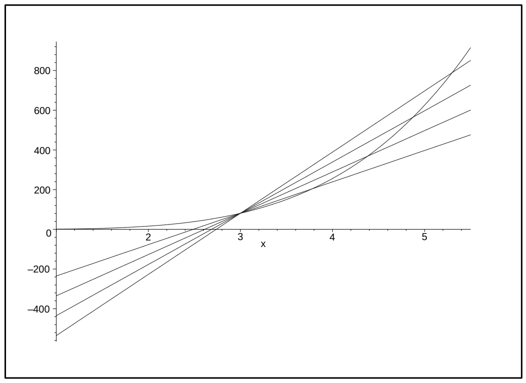

Figura 8.2: Una recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^4$.

Si miramos a la figura (8.2), las rectas secantes a su gráfica en puntos $(x, f(x))$ tales que x tiende al valor 3 (por la derecha), se aproximan a la recta que pasa por el punto $(3, f(3))$ y que tiene pendiente igual a $\lim\limits_{x\to 3+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

Definición 8.1.2 *Sea f una función real definida en un intervalo abierto $I = (a, b)$ y sea c un punto de I. Si existe $m = \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, la recta de ecuación*

$$y(x) = m\,(x-c) + f(c)$$

es la ***recta tangente a la gráfica de f en el punto*** $(c, f(c))$.

Ejemplos 8.1.3 *1) Como es de esperar, la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x - 2$ en el punto $(c, f(c))$ tiene ecuación $y(x) = 3\,(x-c) + 3c - 2 = 3x - 2$.*

2) La recta tangente a la gráfica de la función $s(t) = t^2$ en el punto $(c, f(c))$ tiene pendiente igual a $m = \lim\limits_{t\to c} \frac{f(t)-f(c)}{t-c} = \lim\limits_{t\to c} t + c = 2c$. Su ecuación es $y(t) = 2c(t-c) + c^2 = 2ct - c^2$.

Definición 8.1.4 *Sea f una función real definida en un intervalo abierto $I = (a, b)$ y sea c un punto de I. Si existe $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ se dice que f* ***es***

derivable en el punto *c y el valor $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ es* ***la derivada de la función*** f ***en el punto*** c.
Si f es derivable en todo punto de un intervalo $I = (a, b)$ entonces la función definida en I que asocia a todo $x \in I$ el valor $f'(x)$ es ***la función derivada de*** f ***en*** I.

Notación: para indicar la función derivada de f en un punto x se pueden utilizar los símbolos

$$f'(x), \qquad \frac{df}{dx}(x) \qquad Df(x).$$

Ejemplos 8.1.5 *1) En relción a los ejemplos 8.1.1, la función derivada de $f(x) = 3x - 2$ es la función constante $f'(x) = 3$. La derivada de la función $s(t) = t^2$ es $s'(t) = 2t$ y representa la velocidad instantánea del cuerpo en el tiempo t.*

2) Sea $f(x) = x^3$ y sea c un número real. Entonces

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{x^3 - c^3}{x - c} = \lim_{x\to c} x^2 + cx + c^2 = 3c^2.$$

La función derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2$.

3) Toda función constante es derivable en su dominio y su derivada es la función constante igual a 0: $f(x) = k \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$.

Observación 22 *Se puede demostrar que, dada una función $f(x)$ continua en x_0 y derivable en todo $x \neq x_0$, si existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ entonces $f(x)$ es derivable en x_0 y $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to c} f'(x)$.*

Es importante notar que si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ no existe, la función $f(x)$ puede ser derivable en x_0, como es el caso de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Definición 8.1.6 *Sea $f(x)$ derivable en $I = (a, b)$. Si su función derivada $f'(x)$ es también derivable en I, existe su función derivada, que es la derivada segunda (o de orden 2) de $f(x)$ y se escribe como $f^{(2)}(x)$. De esta forma, se puede seguir derivando las funciones obtenidas a partir de $f(x)$, hasta que se llege a una función no derivable.*

Una función $f(x)$ se dice ***derivable de clase k,*** *$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en I si es continua en I y tiene derivadas continuas en I hasta el orden k.*

8.2 Propiedades básicas de la derivada

8.2.1 Continuidad y derivabilidad

Es natural preguntarse si todas las funciones continuas son derivables. Los siguientes ejemplos contestan de forma negativa a nuestra pregunta.

Ejemplos 8.2.1 *1) La función $f(x) = |x|$ es continua pero no es derivable en el punto $a = 0$. En efecto*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1.$$

Gráficamente, $f(x) = |x|$ no es derivable en $a = 0$ ya que la gráfica presenta un "punto anguloso" en $(0, 0)$.

2) La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en $\mathbb{R}$ pero no es derivable en el punto $a = 0$. En efecto $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$.
Gráficamente, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en $a = 0$ ya que la gráfica presenta una tangente vertical en $(0, 0)$.

Lo que es cierto es que toda función derivable en un punto (intervalo) es también continua en ese punto (intervalo).

Teorema 8.2.2 *Sean $I = (a, b)$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $c \in I$. Entonces f es continua en c.*

Demostración Tenemos que verificar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ o, de forma equivalente, que $\lim_{x\to c} f(x) - f(c) = 0$. Ya que f es derivable en c,

$$\lim_{x\to c} f(x) - f(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) = f'(c) \lim_{x\to c}(x - c) = 0.$$

$\square$

8.2.2 Derivadas de funciones elementales

Ya que la existencia de la derivada de una función en un punto coincide con la existencia de un límite, es natural que las propiedades de las funciones derivables (que son también funciones continuas) se sigan de las propiedades de los límites.

Operaciones con funciones derivables
Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo abierto I.

D1) (*Propiedad de linealidad*) Si r y s son dos números reales, la función $(r\,f + s\,g)(x) = r\,f(x) + s\,g(x)$ es derivable en todo $a \in I$ y $(r\,f + s\,g)'(a) = r\,f'(a) + s\,g'(a)$.

D2) (*Multiplicación*) La función $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$ es derivable en todo $a \in I$ y $(f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.

D3) (*División*) Si $g(a) \neq 0$ la función $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es derivable en todo $a \in I$ y $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}$.

Para verificar las afirmaciones anteriores se utiliza la definición de derivada. Por ejemplo, la regla de la multiplicación D2 se sigue de las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{(f\,g)(x) - (f\,g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)\,g(x) - f(x)\,g(a) + f(x)\,g(a) - f(a)\,g(a)}{x-a} = \\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \end{aligned}$$

Ejemplos 8.2.3 *1) Sea $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Verifiquemos por inducción que f es derivable en a y que $f'(a) = n\,a^{n-1}$:*
si $n = 1$, entonces la función x es derivables en a y su derivada es la función constante $1 = 1\,a^0$.
Sea la función x^n derivable en a con derivada igual a $n\,a^{n-1}$. Entonces la función $x^{n+1} = x^n\,x$ es el producto de dos funciones derivables y, por la regla de la multiplicación D2, su derivada en a es igual a

$$(n\,a^{n-1})\,a + a^n\,1 = (n+1)\,a^n.$$

De forma similar y aplicando la regla de la división D3, se puede verificar que la función $f(x) = x^n$ es derivable en $a \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2) Del ejemplo 1) y de la propiedad D1 se sigue que toda función polinomial es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, la función derivada de la función $f(x) = 5x^7 - 3x^4 + x - 3$ es la función $f'(x) = 35\,x^6 - 12\,x^3 + 1$.

3) Toda función racional es derivable en su dominio. Por ejemplo, sea $f(x) = \frac{3x^2-1}{x+1}$*. La función* $f'(x)$ *está definida en* $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *y es igual a*

$$f'(x) = \frac{6x(x+1) - (3x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x+1}{(x+1)^2}.$$

Derivada de la función logaritmo: para todo $x \in (0, \infty)$, sea $f(x) = ln(x)$ y sea $a \in (0, \infty)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{ln(x) - ln(a)}{x-a} &= \frac{1}{x-a} ln(\frac{x}{a}) = \frac{1}{x-a} ln(\frac{x-a+a}{a}) = \\ &= ln[(1 + \frac{x-a}{a})^{\frac{a}{x-a}}]^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} ln(1 + \frac{x-a}{a})^{\frac{a}{x-a}}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{ln(x) - ln(a)}{x-a} &= \frac{1}{a} \lim_{x \to a} ln(1 + \frac{x-a}{a})^{\frac{a}{x-a}} = \\ &= \frac{1}{a} ln(\lim_{x \to a} (1 + \frac{x-a}{a})^{\frac{a}{x-a}}) = \frac{1}{a} ln(e) = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{\frac{dln}{dx}(x) = \frac{1}{x}}.$$

Más en general, siendo $log_c(x) = \frac{ln(x)}{ln(c)}, \quad (c > 0, c \neq 1)$,

$$\mathbf{\frac{dlog_c}{dx}(x) = \frac{1}{ln(c)\, x}}.$$

8.2.3 Derivadas de funciones trigonométricas

Si verificamos que las funciones $sen(x)$ y $cos(x)$ son derivables en $\mathbb{R}$ y calculamos sus funciones derivadas, entonces podemos deducir en qué puntos son derivables las demás funciones trigonométricas que se definen en términos de $sen(x)$ y $cos(x)$.

Derivadas de las funciones $\mathbf{sen(x)}$ y $\mathbf{cos(x)}$: sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{sen(x) - sen(a)}{x - a} &= \frac{sen((x-a)+a) - sen(a)}{x-a} = \\
&= \frac{sen(x-a)cos(a) + cos(x-a)sen(a) - sen(a)}{x-a} = \\
&= \frac{sen(x-a)}{x-a} cos(a) - \frac{1 - cos(x-a)}{x-a} sen(a).
\end{aligned}$$

Ahora, $\lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x-a)}{x-a} = 1$ y $\lim\limits_{x \to a} \frac{1-cos(x-a)}{x-a} = 0$, por tanto

$$\lim_{x \to a} \frac{sen(x) - sen(a)}{x - a} = 1\, cos(a) - 0\, sen(a) = cos(a).$$

Hemos verificado que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathbf{dsen}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{x}) = \mathbf{cos}(\mathbf{x}).$$

Utilizando un método similar al anterior se verifica que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathbf{dcos}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{sen}(\mathbf{x}).$$

Ejercicio 8.2.1 *Verificar que para todo* $x \in \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\frac{\mathbf{dtg}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} + \mathbf{tg^2}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}(\mathbf{x})} = \mathbf{sec^2}(\mathbf{x})$$

y que en sus dominios de definición:

$$\frac{\mathbf{dcosec}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{cosec}(\mathbf{x})\mathbf{cotg}(\mathbf{x}), \qquad \frac{\mathbf{dsec}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{x}) = \mathbf{sec}(\mathbf{x})\mathbf{tg}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{\mathbf{dcotg}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{cosec^2}(\mathbf{x}),$$

donde

$$\mathbf{cosec}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}(\mathbf{x})} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}),$$

$$\mathbf{sec}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}(\mathbf{x})} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}),$$

$$\mathbf{cotg}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}(\mathbf{x})} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}).$$

8.2.4 Regla de la cadena

La regla de la cadena permite calcular la derivada de la función compuesta de dos funciones derivables.

Regla de la cadena: sean I y J dos intervalos y sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(I) \subseteq J$. Sean $a \in I$ y $f(a) \in J$ dos puntos interiores tales que f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$. Entonces la función $g \circ f$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Demostración Observemos que si existe $(g \circ f)'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}$ y f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, sería conveniente escribir:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}\, \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Calculando el límite cuando x tiende al punto a de la ecuación anterior se obtendría la regla de la cadena.
El único problema es que si $f(x) = f(a)$, entonces no podemos utilizar este método. Para solucionar el problema se recurre a una función auxiliar definida por

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{si} \quad y \neq f(a), \\ g'(f(a)) & \text{si} \quad y = f(a). \end{cases}$$

Siendo g derivable en $f(a)$, la función G es continua en J y

$$g(f(x)) - g(f(a)) = G(f(x))\,(f(x) - f(a)).$$

Entonces, si $x \neq a$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = G(f(x))\, \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Calculando el límite de esta última expresión cuando x tiende al punto a se obtiene que

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

$\square$

Ejemplos 8.2.4 *1) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto I. Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, entonces podemos definir en I la función $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$. Para calcular su derivada se puede utilizar la regla de la división o también la regla de la cadena:*

$$(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{1}{f^2(x)}\, f'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Por ejemplo, sea $f(x) = \frac{1}{3x^4+1}$ (para todo $x \in \mathbb{R}$). Entonces,

$$f'(x) = -\frac{12x^3}{(3x^4+1)^2}.$$

2) Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces

$$ln(|x|) = \begin{cases} ln(x) & si \quad x > 0, \\ ln(-x) & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene que

$$\frac{dln}{dx}(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x > 0, \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Por tanto

$$\mathbf{\frac{dln}{dx}(|x|) = \frac{1}{x}}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3) Sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto I.

Entonces $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geq 0, \\ -f(x) & si \quad f(x) < 0. \end{cases}$

La función $|f(x)|$ es derivable en todo x tal que $f(x) \neq 0$ y

$$\frac{d|f(x)|}{dx} = sgn(f(x))\, \frac{df}{dx}(x).$$

Se sigue que si x tal que $f(x) \neq 0$,

$$\frac{dln}{dx}(|f(x)|) = \frac{sgn(f(x))\, f'(x)}{|f(x)|} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ejercicios 8.2.1 *1) Calcular la derivada de $f(x) = ln(|sen(3x^2+1)|)$, si $x^2 \neq \frac{k\pi - 1}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$.*

2) Calcular la derivada de $f(x) = sen(cos(tg(x)))$.

8.3 Derivada de la función inversa

Teorema 8.3.1 *(**Derivada de la función inversa**) Sea $f : I \to f(I)$ una función continua y biyectiva en el intervalo abierto I. Si f es derivable en un punto $a \in I$ y $f'(a) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ es derivable en el punto $b = f(a) \in f(I)$ y*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Observación 23 *La dificultad de la demostración del teorema (8.3.1) está en verificar que la función f^{-1} es derivable, ya que la fórmula $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ se sigue directamente al derivar por medio de la regla de la cadena la composición $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y calcular el resultado en a.*

Si la función f del teorema (8.3.1) es derivable en un punto $a \in I$ pero $f'(a) = 0$, la función inversa no es derivable en $b = f(a)$. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es biyectiva y continua en $(-1, 1)$ y $f'(0) = 0$. Su función inversa, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, no es derivable en $0 = f(0)$.

Ejemplos 8.3.2 *1) Ya que la función $ln(x)$ es biyectiva y continua en $(0, \infty)$, la función inversa $f(y) = e^y$ es derivable en $(-\infty, \infty)$ y si $y = ln(x)$,*

$$\mathbf{\frac{de^y}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = x = e^y}.$$

2) Por el ejemplo 1), podemos ahora calcular las derivadas de las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, donde $a > 0$: ya que $a^x = e^{ln(a^x)} = e^{x\,ln(a)}$,

$$\mathbf{\frac{da^x}{dx} = e^{x\ln(a)}\ln(a) = a^x \ln(a)}.$$

3) Para calcular la derivada de la función $f(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$ y $x > 0$), se utiliza la técnica anterior: $x^a = e^{ln(x^a)}$, y

$$\mathbf{\frac{dx^a}{dx} = e^{a\ln(x)}\,\frac{a}{x} = a\,x^{a-1}}.$$

Ejercicios 8.3.1 *1) Hallar las derivadas de las funciones $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) y $g(x) = e^{tg(x)}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$).*

2) Verificar que para las funciones trigonométricas inversas valen las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(arcsen(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(arccosec(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\\ \frac{d}{dx}(arccos(x)) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(arcsec(x)) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\\ \frac{d}{dx}(arctg(x)) &= \frac{1}{x^2+1} \qquad \frac{d}{dx}(arccotg(x)) = -\frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

Las fórmulas anteriores valen sólo si x es un punto del dominio de la correspondiente función. (Utilizar la identidad: $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$.)

8.4 Derivación implícita y logarítmica

8.4.1 Derivación implícita y tasas de cambio relacionadas

En todos los ejemplos vistos hemos calculado la derivada de una función, por ejemplo de la función $y(x) = \frac{1}{x}$, definida en **forma explícita** en términos de una variable x. En la práctica, es a menudo importante poder calcular la derivada de una función $y(x)$ sin la necesidad de conocer la expresión de $y(x)$ en términos de x : la ecuación $y\,x = 1$ define **implícitamente** la variable y como función de x y en los siguiente ejemplos se ilustrará como se puede hallar $y'(x)$.

Ejemplo 8.4.1 *Si $x^2 + y^2 = 25$, para hallar $\frac{dy}{dx}$*
derivamos ambos lados de la ecuación respecto de* x*:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y$$

despejamos $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Si ahora queremos calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P = (3, 4)$, sabemos que su pendiente es igual a $\frac{dy}{dx}(3) = -\frac{3}{4}$. Se sigue que la ecuación es $y(x) = -\frac{3}{4}(x-3) + 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

Para hallar la **segunda derivada** $\mathbf{\frac{d^2y}{d^2x}}$ *de* y *respecto de* x*, empleamos otra vez la derivación implícita y las ecuaciones* $x^2+y^2=25$ *y* $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ *:*

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(-\frac{x}{y})=\frac{-y+x\frac{dy}{dx}}{y^2}=$$
$$=-\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\frac{-x}{y}=-\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{25}{y^3}.$$

Poder derivar implícitamente una ecuación dada en las variables x e y es también importante cuando se trata de calcular **tasas (ritmos) de cambio relacionadas:** $x(t)$ e $y(t)$ son dos funciones de una tercera variable t que están en relación según una ecuación conocida y queremos estudiar cómo varían sus valores respecto de una variación de t.

Ejemplos 8.4.2 *1) Se introduce aire en un globo de forma tal que su volumen cambia con una tasa de* $100cm^3/s$*. Determinar la tasa de cambio del radio del globo cuando el diámetro es igual a* $50cm$*.*

Sean $r(t)$ *y* $V(t)$ *el radio y el volumen del globo en el instante* t*. Se sabe que* $\frac{dV}{dt}=100cm^3/s$ *y se quiere calcular el valor de* $\frac{dr}{dt}$ *cuando* $r=25cm$*.*
La relación entre $r(t)$ *y* $V(t)$ *está dada por la ecuación* $V=\frac{4}{3}\pi\, r^3$*, entonces*

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\frac{dr^3}{dt}=\frac{4}{3}\pi\, 3r^2\frac{dr}{dt}=4\pi\, r^2\frac{dr}{dt}.$$

despejando $\frac{dr}{dt}$ *se obtiene que*

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi\, r^2}\frac{dV}{dt}=\frac{25}{\pi\, r^2}.$$

Por tanto, si $r=25cm$*,* $\frac{dr}{dt}=\frac{25}{(25)^2\,\pi}=\frac{1}{25\pi}cm/s$ *y el radio del globo crece con una tasa de cambio igual a* $\frac{1}{25\pi}cm/s$*.*

2) Un avión vuela por una trayectoria horizontal de altura $9Km$*, que le llevará a la vertical de una estación radar. Si la distancia* $s(t)$ *entre el avión y la estación está decreciendo a razón de* $600Km/h$ *cuando* $s(t)=15km$*, ¿cuál es la velocidad del avión?*

Sea $x(t)$ *la distancia entre la estación de radar y el punto de proyección de la posición del avión sobre la superficie terrestre. Entonces*

$$x^2+81=s^2 \qquad y$$

la velocidad del avión está dada por la función $\frac{dx}{dt}$.
De la ecuación $x^2 + 81 = s^2$ *se deduce que*

$$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt} \qquad y\ que \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\frac{ds}{dt}.$$

Cuando $s = 15km$, *es* $\frac{ds}{dt} = -600km/h$ *y*

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{15}{12}600 = -750km/h.$$

8.4.2 Derivación logarítmica

La derivación logarítmica se emplea para simplificar el cálculo de la derivada de una función $f(x)$ que tenga una expresión compleja: se trata de aplicar la función logaritmo neperiano a la función $|f(x)|$ (cuando $f(x) \neq 0$), derivar y despejar $f'(x)$.

Ejemplo 8.4.3 *Derivar la función* $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \qquad (x > 0)$.

$$ln(f(x)) = ln(\frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}) = \frac{3}{4}ln(x) + \frac{1}{2}ln(x^2+1) - 5ln(3x+2),$$

$$\frac{ln(f(x))}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{4x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - 5\frac{3}{3x+2},$$

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}).$$

Ejercicio 8.4.1 *Derivar la función* $f(x) = \frac{(x^3+1)^4\, sen^2(x)}{\sqrt[3]{x}} \qquad (x \neq 0)$.

8.5 Teoremas fundamentales

En el próximo capítulo se estudiarán las principales aplicaciones del cálculo diferencial en una variable. En particular, para poder analizar la gráfica de una función será importante poder determinar sus máximos y mínimos locales.

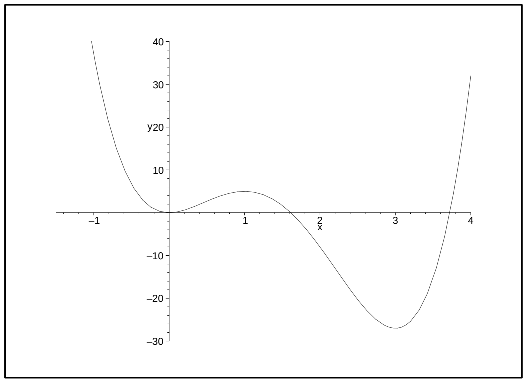

Figura 8.3: La gráfica de $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$.

Extremos relativos (o locales): sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo I. La función $f(x)$ tiene un **máximo [mínimo] local** en $a \in I$ si existe un entorno abierto $I(a, r)$ de a tal que
para todo $x \in I(a, r) \cap I$, $\quad f(x) \leq f(a) \quad [f(x) \geq f(a)]$.

La función $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ de la figura (8.3) definida en el intervalo $[-1, 4]$ tiene un mínimo local en el punto $x = 0$ y un mínimo absoluto en $x = 3$. Los puntos $x = 1$ y $x = 4$ son mínimos locales y el punto $x = -1$ es un máximo absoluto. Se puede observar que la derivada de la función en los extremos relativos que son interiores al intervalo $[-1, 4]$ es siempre igual a 0 y que los extremos del intervalo son extremos relativos (o absolutos).

Una condición necesaria para que un punto sea un extremo relativo está dada por el siguiente teorema.

Teorema 8.5.1 ***(de Fermat)*** *Si f es una función continua en un intervalo I y tiene un extremo relativo en un punto interior $c \in I$, entonces la derivada de f en c o bien no existe, o bien es igual a* 0.

Los puntos interiores de I tales que la derivada de f o bien no existe, o bien es igual a 0 se denominan **puntos críticos**.

La condición del teorema anterior es necesaria y **no es suficiente**, es decir, un punto crítico no tiene que ser un extremo relativo: la función $f(x) = x^3$ tiene derivada igual a 0 en $x = 0$ sin que éste sea un extremo relativo.

Ejemplos 8.5.2 *1) La función* $f(x) = |x|$ *sobre el intervalo* $[-1, 1]$ *no es derivable en* 0. *El punto* 0 *es un mínimo absoluto y los puntos* -1 *y* 1 *son máximos absolutos.*

2) Sea $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$. *La función* $f(x)$ *no es derivable en el punto* $x = 0$ *y, si* $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{3}{5}\,x^{-\frac{2}{5}}\,(4 - x) - x^{\frac{3}{5}} = \frac{3(4 - x) - 5x}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{12 - 8x}{5x^{\frac{2}{5}}} = 0$$

si y sólo si $x = \frac{3}{2}$. *Los puntos críticos son* 0 *y* $\frac{3}{2}$.

Entonces, **para calcular los máximos y mínimos absolutos** de una función f continua en un intervalo $I = [a, b]$, hay que

- calcular los valores de f en los puntos críticos de (a, b),
- calcular $f(a)$ y $f(b)$
- determinar el máximo y el mínimo del conjunto de los valores anteriores.

Ejemplos 8.5.3 *1) En el ejemplo (7.2.2) del capítulo 7, se pedía calcular el mínimo absoluto de la función continua* $A(x) = (x + 6)(\frac{312}{x} + 8)$, *siendo* $x > 0$.

$$A'(x) = \frac{312}{x} + 8 + (x + 6)(-\frac{312}{x^2}) = \frac{312x + 8x^2 - 312x - 1872}{x^2} = 8 - \frac{1872}{x^2}.$$

el único valor crítico positivo de $A(x)$ *es* $x = \sqrt{234} = 3\sqrt{26}$. *Ya que este valor pertenece al intervalo* $[13, 18]$, $A(x)$ *es continua y* $A(13) = A(18) = 608 > 604.7529368 \sim A(\sqrt{234})$, *se sigue que* $x = \sqrt{234}$ *es un mínimo absoluto de* $A(x)$.

2) Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ *en el intervalo* $[-\frac{1}{2}, 4]$. *La función* f *es derivable en este intervalo y* $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$ *si* $x = 0$ *o si* $x = 2$. *Ahora,* $f(0) = 1$, $f(2) = -3$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ *y* $f(4) = 17$. *Por tanto* $x = 2$ *es un mínimo absoluto y* $x = 4$ *es un máximo absoluto de* $f(x)$.

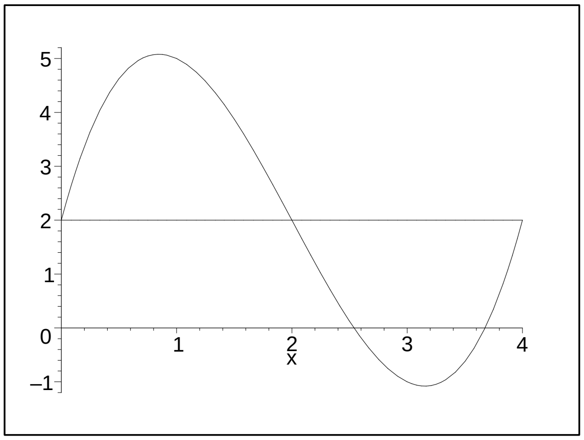

Figura 8.4: La gráfica de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 2$.

En la figura (8.4) está representada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 2$, que es continua en el intervalo $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$. Se puede notar que $f(0) = f(4) = 2$ y que existen dos puntos tales que la recta tangente a la gráfica en estos puntos es horizontal. Esta situación ilustra el contenido del siguiente teorema.

Teorema 8.5.4 ***(Teorema de Rolle)*** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración Siendo continua en $[a, b]$, la función f tiene un valor máximo (absoluto) M y un valor mínimo (absoluto) m en este intervalo. Ahora, si f es constante, es $M = m$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Si f no es constante, es $M > m$ y no puede verificarse que $f(a) = f(b) = m = M$. Por tanto existe un punto interior de $[a, b]$ que es un máximo o un mínimo absoluto. $\square$

Observación 24 *Si f no es continua en todo $[a, b]$ es posible que las conclusiones del teorema anterior no se verifiquen. Por ejemplo la función* $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 < x < 1 \\ 2 & si \quad x = 0, 1 \end{cases}$, *es derivable en $(0, 1)$ pero no es continua en $[0, 1]$ y no existe ningún punto $x \in (0, 1)$ tal que $f'(x) = 1$ sea nula.*

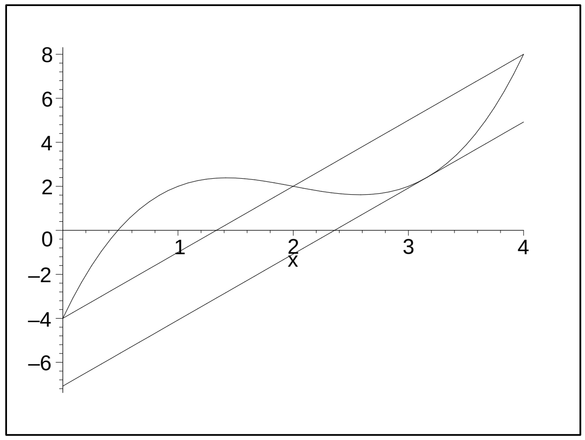

Figura 8.5: La gráfica de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 4$.

En la figura (8.5) la gráfica representada es la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 4$, que también es continua en $[0,4]$ y derivable en $(0,4)$. Esta vez $f(0) = -4 \neq 8 = f(4)$, sin embargo podemos notar que existe un punto tal que la recta tangente a la gráfica por él es paralela a la recta que pasa por $(0,-4)$ y $(4,8)$, es decir existe una recta tangente a la gráfica que tiene pendiente igual a la variación media de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,4]$.

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Rolle.

Teorema 8.5.5 ***(Teorema del valor medio de Lagrange)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración La ecuación de la recta por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

y la función $g(x) = f(x) - y(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ representa la diferencia entre los valores de $f(x)$ y de $y(x)$ en todo punto $x \in [a,b]$.

La función $g(x)$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $g(a) = g(b) = 0$. Por el teorema de Rolle se sigue que existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$, es decir, tal que $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Se sigue que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Ejercicios 8.5.1 *1) Explicar por qué si un coche ha viajado una distancia de* $180 km$ *en dos horas, entonces su taquímetro tiene que haber indicado* $90 km/h$ *al menos una vez.*

2) Sea $f(x)$ derivable en $\mathbb{R}$, $f(0) = -3$, y para todo $x \in \mathbb{R}$, sea $f'(x) \leq 5$. Encontrar una cota superior para $f(2)$.

El teorema del valor medio tiene la siguientes importantes consecuencias.

Corolario 8.5.6 *Sea f una función derivable en el intervalo (a,b). Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en (a,b).*

Corolario 8.5.7 *Sean f y g dos funciones derivables en el intervalo (a,b). Si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f - g$ es constante en (a,b).*

Ejercicios 8.5.2 *1) Demostrar los dos corolarios anteriores.*

2) Sea $f(x) = \frac{x}{|x|}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Verificar que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = 0$ pero f no es constante.

Capítulo 9

Aplicaciones de la derivada

9.1 Análisis de gráficas: criterio de la primera derivada

En los puntos tales que una función $f(x)$ es derivable, el estudio de $f'(x)$ nos permite dar una descripción de algunas características de la gráfica de $f(x)$, en particular de su **monotonía**.

Teorema 9.1.1 ***(Criterio de monotonía)*** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b). Entonces*
1) f es creciente si y sólo si $f'(x) \geq 0 \quad$ para todo $x \in (a, b)$.
2) f es decreciente si y sólo si $f'(x) \leq 0 \quad$ para todo $x \in (a, b)$.

Demostración Si f es creciente en (a, b), entonces para todo $x, y \in (a, b)$,

$$x < y \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \leq f(y).$$

Se sigue que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0,$$

ya que el numerador y el denominador tienen el mismo signo.
Si, viceversa, $f'(x) \geq 0 \quad$ para todo $x \in (a, b)$, podemos verificar que $f(x)$ es creciente en (a, b) aplicando el teorema del valor medio: para todo $x, y \in (a, b)$ tales que $x < y$, $f(x)$ es continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y), por tanto existe $c \in (x, y)$ tal que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0$. Se sigue que $f(y) \geq f(x)$.

El caso $f(x)$ decreciente se demuestra de forma similar. □

Corolario 9.1.2 ***(Test de la primera derivada)*** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f. Entonces*

1) c es un ***máximo local*** *si el signo de f' cambia de positivo a negativo en c.*

2) c es un ***mínimo local*** *si el signo de f' cambia de negativo a positivo en c.*

3) c ***no es un extremo relativo*** *si el signo de f' no cambia en c.*

Observación 25 *Si f es derivable en (a, b) y $f'(x) > 0 \quad [f'(x) < 0]$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente [estrictamente decreciente] en (a, b). La condición $f'(x) > 0 \quad [f'(x) < 0]$ para todo $x \in (a, b)$ es suficiente pero no es necesaria. Por ejemplo la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ y $f'(0) = 0$.*

Ejemplos 9.1.3 *1) Halla el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una semicircunferencia de radio r.*
Para determinar las dimensiones de un rectángulo R inscrito es suficiente determinar las coordenadas (x, y) de su vértice que está sobre la circunferencia y en el primer cuadrante. La base del rectángulo será igual a $2x$ y su altura será y. Por tanto su área es $A(x, y) = 2xy$. Ya que $x^2 + y^2 = r^2$, se sigue que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y que $A(x, y) = A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$. La función $A(x)$ es continua en $[0, r]$, $\quad A(0) = 0$, $A(r) = 0$ y

$$A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Se sigue que $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ es un punto crítico tal que $A'(x)$ pasa de ser positiva a ser negativa. Por tanto $A(\frac{r}{\sqrt{2}}) = r^2$ es el área máxima de R.

2) La función $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ de la figura (8.3) del capítulo 8 es continua en $[-1, 4]$ y derivable en $(-1, 4)$. Su derivada es

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 12x(x - 1)(x - 3).$$

Sus puntos críticos son $0, 1$ y 3. Estudiando el signo de $f'(x)$ se puede verificar que 0 es un punto de mínimo relativo, 1 es un máximo relativo, 3 es un mínimo absoluto. El extremo -1 del intervalo de definición es un máximo absoluto.

Ejercicio 9.1.1 *Se transporta horizontalmente un tubo de acero a lo largo de un pasillo de anchura* $108cm$*. Perpendicular a este primer pasillo se encuentra un segundo pasillo de anchura* $72cm$*. ¿Cuál es la longitud máxima del tubo que permite doblar a la derecha en el segundo pasillo proviniendo del primero? (**Nota:**en realidad este es un problema de mínimo).*

9.2 Regla de l'Hôpital

Otra aplicación del cálculo diferencial es la regla de L'Hôpital, que nos permite calcular, en algunos casos, límites de funciones para los cuáles no es posible emplear las técnicas estudiadas hasta ahora. La regla de L'Hôpital es una consecuencia del siguiente resultado, que es una generalización del teorema del valor medio.

Teorema 9.2.1 ***(Teorema del valor medio de Cauchy)*** *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas en* $[a, b]$ *y derivables en* (a, b)*. Si para todo* $x \in (a, b)$ *es* $g'(x) \neq 0$*, entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

La demostración del teorema anterior es una aplicación no trivial del teorema de Rolle. También del teorema de Rolle se sigue que si para todo $x \in (a, b)$ es $g'(x) \neq 0$, no puede ser $g(a) = g(b)$. Por tanto la expresión $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ tiene sentido.

9.2.1 Formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

En el cálculo del límite de una función se pueden presentar **formas indeterminadas** de varios tipos. La regla de L'Hôpital se aplica a formas indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

Una **indeterminación de tipo** $\mathbf{\frac{0}{0}}$ se presenta cuando se quiere calcular $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $f, g : A \to \mathbb{R}$ son dos funciones tales que a es un punto de acumulación de A y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Una **indeterminación de tipo** $\frac{\infty}{\infty}$ se presenta cuando se quiere calcular $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $f, g : A \to \mathbb{R}$ son dos funciones tales que a es un punto de acumulación de A y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Estas definiciones se extienden también al cálculo de límites laterales.

Ejemplos 9.2.2 *1) Una indeterminación de tipo* $\frac{0}{0}$ *es, por ejemplo, el límite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}.$$

En este caso se puede calcular su valor por medio de simplificaciones algebraicas:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

Otras formas del tipo $\frac{0}{0}$ *son* $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$ *y* $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = 0$, *que hemos calculado geométricamente.*

2) Una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *es, por ejemplo, el límite*

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}.$$

También en este caso se puede calcular su valor por medio de simplificaciones algebraicas:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

3) Los límites $\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}$ *y* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$ *son formas del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$.

4) El límite $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$, *es una forma del tipo* $\frac{0}{0}$.

Teorema 9.2.3 ***(Regla de L'Hôpital)*** *Sea c un punto del intervalo abierto* I *y sean* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables en* $I \setminus \{c\}$. *Si* $g'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I \setminus \{c\}$ *y si se cumple una de las dos siguientes condiciones:*

$$i) \quad \lim_{x\to c} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

$$ii) \quad \lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty,$$

entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

donde el último límite tiene que ser finito o igual a $\pm\infty$.
Además el teorema vale para límites laterales en c *o si* $c = \pm\infty$.

Idea de la demostración: la demostración completa de la regla de L'Hôpital es bastante laboriosa. Aquí se desarollará la demostración del caso correspondiente a la condición i) y c finito o infinito.

Si c es finito, sea $L = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (L es finito o infinito). Hay que verificar que $L = \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$.
Las funciones

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq c, \\ 0 & \text{si} \quad x = c \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \neq c, \\ 0 & \text{si} \quad x = c \end{cases}$$

son continuas en el intervalo I y para todo $x \in I \setminus \{c\}$ se verifica que $F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$.
Si $x > c$ se sigue que F y G son continuas en $[c, x]$, derivables en (c, x) y $G'(y) \neq 0$ para todo $y \in (c, x)$. Por el teorema del valor medio de Cauchy, existe $d \in (c, x)$ tal que

$$\frac{F'(d)}{G'(d)} = \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

En la última fracción, $G(x) \neq 0 = G(c)$, por la observación siguiente al teorema del valor medio de Cauchy.
Si x tiende a c por la derecha, también d tenderá a c por la derecha y

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{d\to c^+} \frac{F'(d)}{G'(d)} = \lim_{d\to c^+} \frac{f'(d)}{g'(d)} = L,$$

donde la última identidad se verifica ya que $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
Una segunda aplicación del teorema del valor medio de Cauchy permite verificar que también $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Por tanto

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Si ahora $c = \infty$, sea $t = \frac{1}{x}$. Entonces, aplicando la regla de L'Hôpital para el caso finito, se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(1/t^2)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

El caso $c = -\infty$ es similar. □

NOTA IMPORTANTE: antes de aplicar la regla de L'Hôpital hace falta verificar que todas las hipótesis se cumplan. Por ejemplo se podría escribir

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{sen(x)}{1 - cos(x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{cos(x)}{sen(x)} = -\infty,$$

obteniendo un resultado falso, ya que

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{sen(x)}{1 - cos(x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Es importante observar también que existen funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, pero $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no existe. Por ejemplo, si condideramos las funciones $f(x) = x^2 sen(\frac{1}{x})$ y $g(x) = x$ con $a = 0$. (Verificar.)

Ejemplos 9.2.4 *1) Los límites* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$ *son formas del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$.
$f(x) = ln(x)$ *y* $g(x) = x$ *son funciones derivables en* $(0, \infty)$ *y* $g'(x) = 1$ *para todo* $x \in (0, \infty)$. *Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

$f(x) = e^x$ *y* $g(x) = x^2$ *son funciones derivables en* $\mathbb{R}$ *y* $g'(x) = 2x \neq 0$, $g''(x) = 2 \neq 0$, *para todo* $x \in (0, \infty)$. *Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces se obtiene que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

2) El límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$ *es una forma del tipo* $\frac{0}{0}$.
$f(x) = 2^x - 1$ *y* $g(x) = x$ *son funciones derivables en* $\mathbb{R}$ *y* $g'(x) = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x ln(2)}{1} = ln(2).$$

3) Un ejemplo de un límite que es una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *y para el cuál la aplicación de la regla de L'Hôpital no es de utilidad es el siguiente:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + sen(x)}{e^x + cos(x)}.$$

Las funciones $f(x) = e^x + sen(x)$ *y* $e^x + cos(x)$ *son derivables en* $\mathbb{R}$ *y* $g'(x) = e^x - sen(x) \neq 0$ *si* $x > 0$. *En este caso la aplicación de la regla de L'Hôpital no simplifica el cálculo del límite, que es igual a 1 (verificar).*

9.2.2 Otras formas indeterminadas

La regla de L'Hôpital se puede usar en otro tipo de indeterminaciones, haciendo las operaciones adecuadas que las convierten en una indeterminación de las recogidas en el enunciado del teorema (9.2.3).

Productos del tipo $0 \cdot \infty$.
Esto es, se trata de calcular $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ y se tiene que $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = \infty(-\infty)$, con $c \in \mathbb{R}$ o $c = \pm\infty$.

Para esto se usan las igualdades

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad o \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Ejemplos 9.2.5 *1)* $\lim_{x\to\infty} e^{-x} ln(x)$

Se puede escribir como $\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{e^x}$ *y en esta expresión se puede aplicar la regla de L'Hôpital:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0.$$

2) $\lim_{x\to 0^+} xln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$

Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$.
Se trata de calcular $\lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$ cuando $f(x)$ y $g(x)$ son funciones que tienden a infinito cuando x tiende a c. De nuevo hay que conseguir escribir $f(x) - g(x)$ como un cociente en las condiciones de la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 9.2.6

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} sec(x) - tg(x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1}{cos(x)} - \frac{sen(x)}{cos(x)} =$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - sen(x)}{cos(x)} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{cos(x)}{sen(x)} = 0$$

Indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0 y 1^∞.
Se utilizan las igualdades

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} g(x) ln(f(x))}.$$

Ejemplos 9.2.7 *1)* $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + sen(4x))^{cotg(x)} =$

$$e^{(\lim\limits_{x\to 0^+} cotg(x) ln(1+sen(4x)))} = e^{(\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ln(1+sen(4x))}{tg(x)})} =$$

$$= e^{(\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4cos(4x)cos^2(x)}{1+senx})} = e^4$$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{sen(x)} = e^{(\lim\limits_{x\to 0^+} sen(x) ln(x))} = e^{(\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{1/sen(x)})} = 1.$

3)

$$\lim_{x\to 0^+} (-ln(x))^x = e^{(\lim\limits_{x\to 0^+} x\, ln(-ln(x)))} =$$

$$= e^{-(\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{ln(x)})} = e^0 = 1.$$

9.3 Aproximación de Taylor

En esta sección abordamos la cuestión de cómo aproximar funciones por funciones polinomiales. Esto es, dada una función f y un punto x_0 en su dominio encontrar un polinomio que sea una buena aproximación para la función f en un entorno de dicho punto. Veremos qué condiciones debe cumplir la función f para que se pueda construir un polinomio adecuado en dicho punto de manera que además podamos controlar el error que se comete.

9.3.1 Polinomio de Taylor

Partimos de un ejemplo para ver cuál debería ser la definición del polinomio que presentamos en el párrafo anterior.

Ejemplo 9.3.1 *Sea la función $f(x) = sen(x)$ y el punto $x_0 = 0$. Para aproximar la función con polinomios de distinto grado vamos imponiendo condiciones.*
Si el **polinomio es de grado 0** *entonces será $P_0(x) = a_0$ y como queremos que aproxime el valor de la función f en 0, se tiene que:*

$$a_0 = f(0) = 0.$$

Si el **polinomio es de grado 1** *entonces será $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ y para determinar a_1 imponemos que el valor de la primera derivada de f en 0 sea igual a la primera derivada de $P_1(x)$ en el mismo punto:*

$$a_1 = f'(0) = 1.$$

Si el **polinomio es de grado 2** *entonces será $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ y para determinar a_2 imponemos que el valor de la segunda derivada de f en 0 sea igual a la segunda derivada de $P_2(x)$ en el mismo punto:*

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = 0.$$

Si el **polinomio es de grado 3** *entonces será $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ y para determinar a_3 imponemos que el valor de la tercera derivada de f en 0 sea igual a la tercera derivada de $P_3(x)$ en el mismo punto.*

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{-1}{6}.$$

Y así sucesivamente vamos aproximando el $sen(x)$ por un polinomio para el cual tenemos coincidencia con el valor de la función y sus derivadas en $x_0 = 0$. En particular en grado 3 se tiene:

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

Con las ideas obtenidas del ejemplo podemos dar la definición general:

Definición 9.3.2 *Sea una función f y un punto x_0 donde existen las derivadas de la función f hasta el orden n, con n un número natural, entonces el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0 se define como:*

$$P_n(x;x_0) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

9.3.2 Teorema de Taylor

Una vez que tenemos el polinomio de Taylor debemos estudiar la bondad de la aproximación de f por dicho polinomio. Este estudio lo da el siguiente teorema.

Teorema 9.3.3 ***(Teorema de Taylor)*** *Sea un número natural n, una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ y un punto $x_0 \in I = [a,b]$ de modo que f, f', ..., $f^{(n)}$ sean funciones continuas en I y $f^{(n+1)}$ exista en (a,b). Entonces para cada punto x de I existe c entre x_0 y x de modo que:*

$$f(x) = P_n(x;x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

A la expresión $R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ se le llama **residuo de orden n en su forma de Lagrange**.

Esquema de la demostración:

Para cada punto $x \in I \setminus \{x_0\}$ definimos la función:

$$R_n(x;x_0) = f(x) - P_n(x;x_0).$$

La demostración es similar a la demostración del teorema del valor medio: se construye un nueva función G a la que se puede aplicar el teorema de Rolle.

Sea entonces $J = [x_0, x]$ (estamos suponiendo $x > x_0$ en caso contrario hay que tomar el intervalo $[x, x_0]$) y sea la función

$$G : [x_0, x] \to \mathbb{R}$$

definida por la expresión

$$G(t) = f(x) - [P_n(x;t) + R_n(x;x_0)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}].$$

Entonces está en las hipótesis del torema de Rolle ya que es continua en $[x_0, x]$, derivable en (x_0, x) y

$$G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$G(x_0) = f(x) - (P_n(x; x_0) - R_n(x; x_0)) = 0.$$

De este modo, por el teorema de Rolle, existe $c \in (x_0, x)$ tal que $G'(c) = 0$. Es una verificación comprobar que

$$0 = G'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + (n+1)R_n(x; x_0)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Y despejando en esta expresión se obtiene exactamente:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Analicemos un ejemplo de aplicación de este teorema. Se puede utilizar para aproximar números no racionales con la precisión que se necesite.

Ejemplo 9.3.4 *Aproximar el número e con un error menor que 10^{-5}.*

Tomamos la función $f(x) = e^x$. Sabemos que $f(0) = 1$, $f(1) = e$ y además conocemos el valor de las distintas derivadas en el 0. Vamos a construir entonces el polinomio de Taylor en el punto 0 con un orden n suficientemente grande de modo que el error sea menor que 10^{-5}.

Tomamos por ejemplo el intervalo $[-2, 2]$ y como para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ entonces el polinomio de Taylor de orden N en 0 es:

$$P_n(x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} = \Sigma_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

Por el teorema de Taylor existe $c \in (0, 1)$ tal que:

$$R_n(1, 0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Por tanto como $c \in (0, 1)$ y, como queremos que el error sea menor que 10^{-5}, entonces:

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^{-5}}.$$

Y basta tomar $n = 8$. De este modo

$$e \approx P_8(1; 0) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + ... + + \frac{1}{8!} = 2.71828.$$

Ejercicios 9.3.1 *1) Calcula el polinomio de Taylor de grado n de la función $ln(x+1)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.*

2) Aproxima el valor de $\sqrt[3]{1,1}$ por medio del polinomio de Taylor de grado 3 de alguna función y estima el error cometido.

9.4 Aplicaciones del Teorema de Taylor

Estudiemos para finalizar este capítulo otras dos aplicaciones del teorema de Taylor. La primera para distinguir si un punto crítico es verdaderamente un extremo relativo y la segunda para estudiar la concavidad y convexidad de una función.

9.4.1 Derivadas de orden superior y extremos relativos

Tomemos una función $f : I \to \mathbb{R}$ (I un intervalo abierto) y un punto $x_0 \in I$ de modo que:

i) f', f'', ..., $f^{(n)}$ son funciones continuas en I.
ii) $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Entonces por el teorema de Taylor existe c entre x_0 y x de modo que para cada punto $x \in I$ se tiene que:

$$f(x) = P_{n-1}(x; x_0) + R_{n-1}(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Como nuesto problema es determinar el signo de $f(x) - f(x_0)$, de la igualdad

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

se sigue que el signo dependerá de la paridad de n y del signo de la derivada enésima en c.

Observación 26 *Ya que $f^{(n)}$ es continua en x_0 y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ existe un entorno de x_0, digamos $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta \in \mathbb{R}^+$) de modo que en todos esos puntos el signo de la derivada enésima es igual (y por tanto igual al signo de $f^{(n)}(x_0)$).*

Esta sencilla observación y las igualdades de los párrafos anteriores permiten concluir el siguiente criterio:

Condición suficiente para extremos relativos. En las hipótesis anteriores i) y ii).

Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$ entonces x_0 es un **mínimo relativo**.
Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$ entonces x_0 es un **máximo relativo**.
Si n es impar entonces x_0 no es un extremo relativo.

Ejemplos 9.4.1 *1) $f(x) = x^3$ es una función derivable todas las veces que uno necesite en todo $\mathbb{R}$. Tomamos el punto $x_0 = 0$ donde se tiene:*

$$f'(0) = f''(0) = 0 \quad y \quad f^{(3)}(0) = 6 > 0.$$

Como $n = 3$ es impar entonces el 0 no es un extremo relativo.
2) $f(x) = x^4 - 4x^3$. En este caso

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

de modo que el conjunto de puntos críticos es $\{0, 3\}$. Como la derivada segunda es:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

Entonces en el punto $x = 3$ se tiene $f'(3) = 0$ y $f''(3) = 36 > 0$ por tanto, como $n = 2$ es par, 3 es un mínimo relativo.
Por otro lado $f''(0) = 0$ y $f^{(3)}(x) = 24x - 24$ por lo que $f^{(3)}(0) = -24 < 0$ de modo que $x = 0$ no es un extremo de la función.

Ejercicio 9.4.1 *Hallar los extremos de $f(x) = |x^2/(x+1)|$.*

9.4.2 Funciones convexas y puntos de inflexión

La última aplicación del teorema de Taylor que presentamos hace referencia a la concavidad o convexidad de una función, esto es, a la posición de la gráfica con respecto a sus rectas secantes o tangentes. Sobre los nombres *función concava* y *función convexa* no hay unicidad en las definiciones y a veces se usan los nombres cambiados a como los vamos a presentar aquí.

Una función será convexa (ver figura 9.1) en un intervalo si al tomar dos puntos de dicho intervalo x_0 y x_1 el segmento de la recta secante a la gráfica

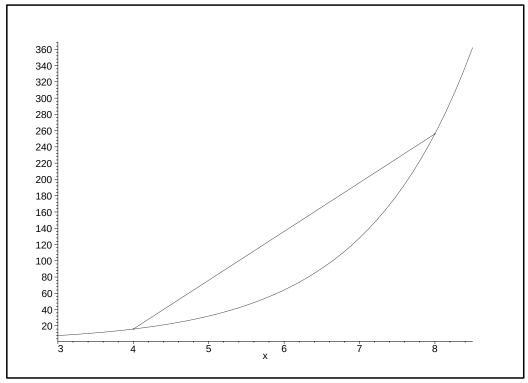

Figura 9.1: Función convexa

entre los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ cae por encima de la gráfica de la función. Si parametrizamos adecuadamente los puntos de dicho segmento podemos dar la definición formal.

Definición 9.4.2 *Sea I un intervalo abierto, $f : I \to \mathbb{R}$ se dice convexa en I si para cada $x_0, x_1 \in I$ y para cada $t \in [0, 1]$ se verifica que:*

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

El teorema de Taylor permite dar un criterio para la convexidad de una función analizando su segunda derivada. La idea es analizar cuál es la posición de la recta tangente en una función convexa.

Test de convexidad. Sean I y f como en la definición anterior tal que existe $f''(x)$ para cada $x \in I$. Entonces f es convexa si y solamente si $f''(x) \geq 0$ para cada x en I.

Ejemplo 9.4.3 *Estudiemos la convexidad de $f(x) = x^4 - 4x^3$. La derivada segunda es:*

$$f''(x) = 12x(x-2).$$

Y por tanto es positiva en el conjunto $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, donde la función es convexa, y negativa en el intervalo $(0, 2)$. Por tanto los puntos $x = 0$ y

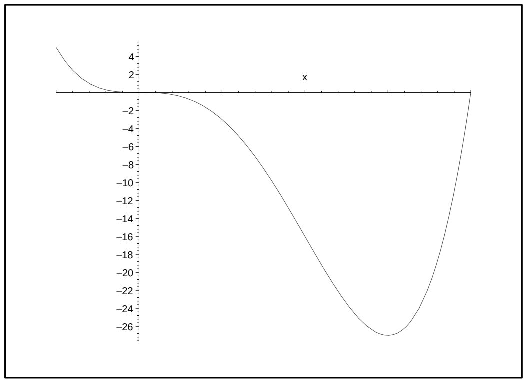

Figura 9.2: Gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

*$x = 2$ son puntos donde el signo de la segunda derivada cambia, que llamamos **puntos de inflexión**.*

Capítulo 10

Integración

En este capítulo se introduce la noción de integral de una función en un intervalo, concepto que permite calcular el área encerrada por la gráfica de la función y el eje de abscisas entre dos valores reales. La definición que se presentará es la de integral de Riemann, estableciéndose ciertos teoremas fundamentales, entre ellos el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, que relaciona el concepto de integral con el de derivada.

A continuación se presentan las técnicas de integración clásicas y finalmente se introducen las integrales impropias, que aparecen como límite de integrales de Riemann.

Las aplicaciones de la teoría de la integración al cálculo de áreas y volúmenes serán desarroladas durante la práctica de laboratorio con Maple V sobre la teoria de la integración.

El alumno estudiará técnicas de integración numérica durante la asignatura de Cálculo.

10.1 Integral de Riemann

La integral de Riemann recoge la idea intuitiva de aproximar el área que encierra la gráfica de una función y el eje de abscisas entre dos valores reales por medio de rectángulos cuyas bases se van haciendo cada vez más pequeñas (ver Práctica 5 y figuras (10.1) y (10.2)).

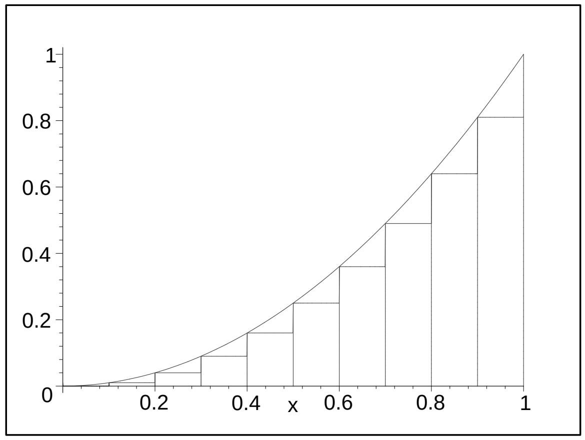

Figura 10.1: Sumas inferiores

10.1.1 Sumas superiores e inferiores

Para aproximar el valor del área encerrada por una cierta función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y el eje de abscisas entre a y b, podemos primero dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos y construir ciertos rectángulos cuyas bases son dichos subintervalos y las alturas están relacionadas con los valores de la f en cada subintervalo. La suma de las áreas de dichos rectángulos nos dará una aproximación para dicha área.

Definición 10.1.1 *Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Se define una* **partición** $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *de I como un conjunto de puntos ordenados $x_0 < x_1 < ... < x_n$ tal que $x_0 = a$ y $x_n = b$.*

Al conjunto de todas las particiones de I lo denotaremos $\mathcal{P}(I)$.

Ejemplo 10.1.2 *El conjunto $P = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ es una partición del intervalo $[0, 1]$ y descompone dicho intervalo en unión de 4 subintervalos de longitud $1/4$:*

$$[0, 1] = [0, 1/4] \cup [1/4, 1/2] \cup [1/2, 3/4] \cup [3/4, 1].$$

A partir de una partición se tienen distintas formas de definir familias de rectángulos cuya área total aproxima el área de la región R de la que queremos calcular su área.

Sean en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, .., n)$ los siguientes números:

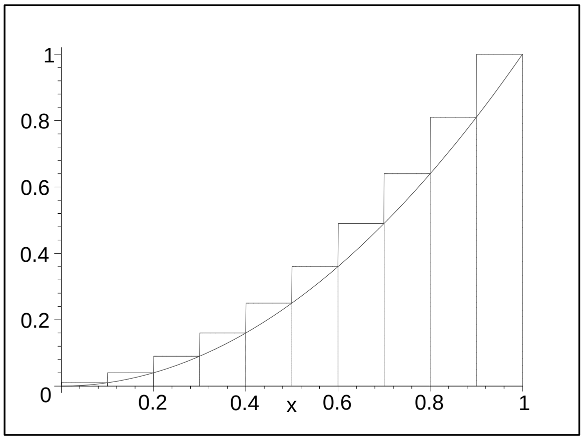

Figura 10.2: Sumas superiores

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Con estos números considerados como alturas de los rectángulos podemos definir dos aproximaciones al área de R asociadas a la partición.

Definición 10.1.3 *Con las notaciones de los párrafos anteriores se define la* **suma inferior** *de f asociada a la partición P del intervalo I como:*

$$L(P, f) = \Sigma_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Y la **suma superior** *de f asociada a P como:*

$$U(P, f) = \Sigma_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Ejemplo 10.1.4 *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2$ y la partición $P = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ entonces (ver figuras (10.1) y (10.2)):*

$$L(P, f) = \frac{1}{4}(0^2 + (1/4)^2 + (1/2)^2 + (3/4)^2)$$

$$U(P, f) = \frac{1}{4}((1/4)^2 + (1/2)^2 + (3/4)^2 + 1^2).$$

Es claro que las sumas superiores son aproximaciones por exceso del área de R y las inferiores por defecto. Para ir haciendo aproximaciones cada vez más precisas se trata de ir subdividiendo las particiones que se toman, lo que formalmente queda definido en el siguiente párrafo.

Definición 10.1.5 *Sean Q y P particiones de un intervalo $I = [a, b]$. Se dice que Q es un* **refinamiento** *de P si $P \subseteq Q$.*

Ejemplo 10.1.6 *Sea $P = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ una partición de $[0, 1]$ entonces $Q = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 7/8, 1\}$ es un refinamientos de P.*

Proposición 10.1.7 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y sean P y Q dos particiones de $[a, b]$ tales que Q es un refinamiento de P entonces:*

i) $L(P, f) \leq U(P, f)$;
ii) $L(P, f) \leq L(Q, f) \leq U(Q, f) \leq U(P, f)$.

La siguiente observación es una consecuencia de que toda partición de un intervalo $[a, b]$ es un refinamiento de la partición $\{a, b\}$ y de la anterior proposición.

Observación 27 *El conjunto $\mathcal{L} = \{L(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ está acotado superiormente.*

El conjunto $\mathcal{U} = \{U(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ está acotado inferiormente.

Por tanto es una consecuencia del axioma del supremo que el conjunto $\mathcal{L}$ tiene supremo, que denotaremos L, y el conjunto $\mathcal{M}$ tiene ínfimo, que denotaremos U.

Esto permitirá definir el concepto de integrabilidad de Riemann y el concepto de integral de Riemann.

10.1.2 Criterio de integrabilidad de Riemann

Definición 10.1.8 *Con las notaciones anteriores, sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es* ***integrable (Riemann-integrable)*** *en $[a, b]$ si $L = M$ y a dicho valor común se le llama* ***integral*** *de f de a a b y se le denota:*

$$M = L = \int_a^b f(x)dx.$$

Observación 28 *Por definición,*

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Ejemplos 10.1.9 *1) Una función constante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) es siempre integrable ya que para toda partición P se tiene que:*

$$L(P, f) = U(P, f) = c(b-a).$$

Y dicho valor es por tanto el valor de la integral.

2) La función de Dirichlet en $[0,1]$ definida como $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ en caso contrario verifica que para cada partición P:

$$L(P, f) = 0 \qquad U(P, f) = 1$$

y por tanto no es integrable.

La definición de integral es un concepto que involucra a las sumas superiores e inferiores obtenidas a partir de cualquier partición del intervalo en cuestión. La siguiente proposición permite restringirnos a unas ciertas particiones concretas, simplificando la definición.

Proposición 10.1.10 (Criterio de integrabilidad de Riemann) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n la* **partición uniforme** *de $[a,b]$ de longitud n, es decir:*

$$P_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, ..., b\}.$$

Entonces f es integrable si y solamente si:

$$\lim_{x\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{x\to\infty} U(P_n, f).$$

Y dicho límite común es el valor de la integral.

Ejemplo 10.1.11 *Sea la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ y la partición uniforme de longitud $n \in \mathbb{N}$*

$$P_n = \{0, 1/n, 2/n, ..., 1\}$$

entonces se sigue que:

$$L(P_n, f) = f(\frac{0}{n})\frac{1}{n} + f(\frac{1}{n})\frac{1}{n} + ... + f(\frac{n-1}{n})\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

Que converge a $1/3$ *cuando* n *tiende a infinito.*

De manera similar se tiene que

$$U(P_n, f) = f(\frac{1}{n})\frac{1}{n} + f(\frac{2}{n})\frac{1}{n} + ... + f(1)\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + ... + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Que también converge a $1/3$ *cuando* n *tiende a infinito.*

Por tanto:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

10.1.3 Área como límite de una suma

Veamos otra manera de definir la integral que nos permite simplificar el cálculo de la misma: para determinar los rectángulos que se usarán para aproximar el área se utilizan algunos valores de f sin necesidad de calcular los números M_k y m_k.

Definición 10.1.12 *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y* $P = \{x_0, x_1, ...x_n\}$ *una partición de* $[a, b]$*. Sea ahora un conjunto de* n *puntos* $(c_1, ..., c_n)$ *de modo que* $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *para todo* $k \in \{1, ...n\}$*. Entonces se define la* **suma de Riemann** *correspondiente a* f*,* P *y la elección de los* c_k *como:*

$$S(P, f) = \Sigma_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Cabe observar que la suma de Riemann representa la suma de las áreas de los rectángulos de base la definida por la partición y de altura la imagen por f de los c_k. De modo que como por definición:

$$m_k \leq f(c_k) \leq M_k,$$

entonce se tiene:

$$L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f).$$

Observación 29 *En general las sumas inferiores y superiores no son sumas de Riemann ya que el supremo y el ínfimo de una función no son necesariamente un valor máximo y un valor mínimo de la misma. Sea por ejemplo una función f definida como $f(x) = x$ si $x \in [0,1)$, como $f(1) = 5$ y como $f(x) = (x-1)^2+2$ si $x \in (1,2]$. Para esta función el $inf\{f(x) : x \in [1,2]\} = 1$ no es un valor mínimo.*

Teorema 10.1.13 ***(Integral como límite de sumas de Riemann)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea P_n una partición uniforme de $[a,b]$. En estas condiciones f es integrable si y solamente si existe $\lim\limits_{x\to\infty} S(P_n, f)$ y es independiente de la elección de los puntos $c_1, ..., c_n$.*

Ejemplo 10.1.14 *Sea la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$. Consideramos la partición $P_n = \{0, 1/n, 2/n, ..., 1\}$. Tomamos los puntos medios de los subintervalos que define la partición:*

$$(c_1, c_2, ..., c_n) = (\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, ..., \frac{2n-1}{2n}).$$

La correspondiente suma de Riemann es:

$$S(P_n, f) = \Sigma_{k=1}^{n} f(\frac{1}{2}(\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n}))\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^{n} f(\frac{2k-1}{2n}) = \frac{1}{4n^3}(4\Sigma_{k=1}^{n}k^2 - 4\Sigma_{k=1}^{n}k + \Sigma_{k=1}^{n}1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{n(n+1)}{2n^3} + \frac{1}{4n^2}.$$

De modo que al calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} S(P_n, f) = \lim_{x\to\infty} \frac{2n^3 + ...}{6n^3} = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx.$$

10.2 Propiedades básicas de la integral

En esta sección se presentarán algunas propiedades básicas de la integral, cuya validez es consecuencia de la definición de integral como límite de sumas de Riemann.

10.2.1 Funciones integrables sobre un intervalo $[a,b]$

Una vez definido el concepto de integral, además de varias maneras equivalentes, el objetivo de esta sección es presentar algunas funciones integrables. El siguiente teorema afirma que las funciones monótonas y las funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ (en ambos casos funciones acotadas) son funciones integrables.

Teorema 10.2.1 *i) Toda función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monótona es integrable en el intervalo $[a,b]$.*
ii) Toda función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua es integrable en el intervalo $[a,b]$.

Idea de la demostración.
i) Sea P_n una partición uniforme de $[a,b]$. Si f es creciente (un razonamiento análogo servirá si f es decreciente) entonces:

$$U(P_n,f)-L(P_n,f)=\Sigma_{k=1}^{n}M_k(\frac{b-a}{n})-\Sigma_{k=1}^{n}m_k(\frac{b-a}{n})=$$

$$=\frac{b-a}{n}\Sigma_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)).$$

De esta manera se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}(U(P_n,f)-L(P_n,f))=0$$

Lo que demuestra que es integrable.

ii) Si f es continua entonces la función alcanza el máximo y el mínimo en cada subintervalo de modo que para todo $k\in\{1,...,n\}$ existen $c_k,d_k\in[x_{k-1},x_k]$ tales que:

$$M_k=max\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(c_k)$$

$$m_k=min\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(d_k).$$

De este modo $U(P_n,f)$ es la suma de Riemann asociada a los puntos $c_1,...,c_n$ y lo mismo para $L(P_n,f)$ con los puntos $d_1,...,d_n$. Por tanto

$$U(P_n,f)-L(P_n,f)=\frac{b-a}{n}\Sigma_{k=1}^{n}(f(c_k)-f(d_k)).$$

Y asi si n tiende a infinito, como $max\{f(c_k)-f(d_k)\}$ tiende a 0, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}(U(P_n,f)-L(P_n,f))=0$$

Lo que demuestra que es integrable.

Ejemplo 10.2.2 *Sea* $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ *en* $[-2, 2]$. *Como* f *es continua en dicho intervalo entonces es integrable. Como se trata del área encerrada por una semicircunferencia de centro en el origen y radio 2 se tiene:*

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx = 2\pi.$$

10.2.2 Integrales y operaciones con funciones

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Entonces,

I1)**(Propiedad de linealidad)** Para cada $c, d \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx.$$

I2)**(Propiedad de monotonía)** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo punto $x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

I3)**(Propiedad de acotación)** Si m, M son respectivamente cota inferior y superior de f entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

En particular la integral de una función positiva es positiva.

I4)**(Propiedad de aditividad respecto del intervalo)** Sea $c \in (a, b)$. La función f es integrable en $[a, b]$ si y solamente si lo es en $[a, c]$ y $[c, b]$ y además:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ya que por definición $\int_a^a f(x)dx = 0$ y $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, la propiedad de aditividad vale para todo α, β, $\gamma \in [a, b]$, es decir,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx.$$

Ejemplo 10.2.3 *Sea la función $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2x-3|$. Entonces la función se puede definir como $f(x) = 2x-3$ si $x \geq 3/2$ y $f(x) = -2x+3$ si $x \leq 3/2$. Entonces por la propiedad de aditividad:*

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^{3/2} (-2x+3)dx + \int_{3/2}^5 (2x-3)dx =$$

$$= -2\int_0^{3/2} xdx + 3\int_0^{3/2} dx + 2\int_{3/2}^5 xdx - 3\int_{3/2}^5 dx.$$

Y finalmente usando las fórmula del área de un trapecio y de un rectángulo se determina el valor de la integral.

I5)**(Composición de funciones)** Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f([a,b]) \subseteq [c,d]$ (para que tenga sentido la composición). Si f es integrable y g es continua entonces la composición $g \circ f$ es integrable en $[a,b]$.

I6)**(Valor absoluto)** En particular, como el valor absoluto es una función continua, entonces si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable también lo es $|f|$ y

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

I7)**(Potencias enteras positivas)** Sea $n \in \mathbb{N}$, como la función $g(x) = x^n$ es continua, entonces, usando I5 se tiene que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable entonces $f^n(x)$ es integrable.

I8)**(Propiedad del producto)** Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones integrables entonces, como el producto fg se puede escribir como

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2},$$

de las propiedades anteriores se deduce que fg es integrable en $[a,b]$.

I9)**(Potencias enteras negativas)** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y c una constante positiva de modo que $f(x) \geq c > 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces la función $1/f$ es integrable en $[a,b]$ ya que es la composición de f con la función continua $1/x$.

Ejemplos 10.2.4 *1) La función* $f(x) = \frac{1}{ln(x^2+2)}$ *es integrable en* $[0,3]$ *por ser* $ln(x^2+2) \geq ln(2) > 0$ *para todo* $x \in [0,3]$.

2) Como $f(x) = \sqrt{x}$ *es una función monótona creciente en* $[1,4]$ *entonces en dicho intervalo* $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$ *de modo que*

$$3 \leq \int_1^4 \sqrt{x}dx \leq 6.$$

3) Como en el intervalo $[4,6]$ *se verifica que* $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{8-x}$ *(ya que dicha desigualdad es equivalente a* $8-x \leq x$*) entonces se tiene que*

$$\int_4^6 \frac{1}{x}dx \leq \int_4^6 \frac{1}{8-x}dx.$$

10.3 Teoremas fundamentales

Presentamos en esta sección algunos teoremas básicos referidos al cálculo integral, en especial el Teorema Fundamental en que se relaciona el cálculo de integrales con el concepto de derivada.

10.3.1 Teorema del valor medio para integrales

El primer teorema es una aplicación del teorema del valor intermedio de funciones continuas.

Teorema 10.3.1 ***(Teorema integral del valor medio)*** *Sean* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones que verifican:*

i) f *es continua en* $[a,b]$*;*
ii) g *es integrable en* $[a,b]$ *y* $g(x) \geq 0$ *para todo* x *de* $[a,b]$.

Entonces existe $c \in (a,b)$ *tal que:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Observación 30 *En el caso particular en que* g *es la función constante 1 el teorema se lee como que existe un punto* $c \in (a,b)$ *de modo que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Es decir, que si la función f es positiva, existe $c \in (a,b)$ de modo que el área determinada por la gráfica de f y el eje de abscisas en $[a,b]$ es el área del rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$.

Ejemplo 10.3.2 *Sea la función F definida como:*

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} e^{-t^2} dt.$$

Para calcular el límite de esta función cuando x tiende a infinito usamos el teorema del valor medio para integrales, en la versión señalada en la observación, entonces existe $c \in (x^2, x^2+1)$ de modo que:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{c\to\infty} e^{-c^2} = 0.$$

10.3.2 Teorema fundamental del cálculo

El siguiente teorema establece una relación fundamental entre la teoría de la integración y la teoría de la derivación, permitiendo el cálculo de muchas integrales.

Teorema 10.3.3 (Teorema fundamental del cálculo integral) *Sean $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a,b]$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) F es derivable en (a,b) y para cada $x \in (a,b)$ $F'(x) = f(x)$.
2) $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ para cada $x \in [a,b]$. (Regla de Barrow)

Definición 10.3.4 *Una función $F(x)$ es una función* **primitiva** *de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ para todo punto x en el dominio de f.*

Y dada una función f se llama **integral indefinida** *de f al conjunto de todas sus funciones primitivas y se escribe (ver Corolario (8.5.7))*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde C es cualquier número real y $F(x)$ es una primitiva cualquiera de f.

Entonces el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI) implica que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces para cada $x \in [a,b]$:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt.$$

Ejemplos 10.3.5 *1) Si $f(x) = a \in \mathbb{R}$ es una función constante, entonces $F(x) = ax$ es una primitiva y de este modo*

$$\int adx = ax + C \qquad \int_0^5 adx = 5a.$$

2) Si $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ entonces $F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ es una primitiva:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad \int_0^2 x^r dx = \frac{2^{r+1}}{r+1} \quad (r > 0).$$

3)

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int_0^5 e^x dx = e^5 - 1.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C \qquad \int_0^2 a^x dx = \frac{a^2}{ln(a)} - \frac{1}{ln(a)}.$$

4)

$$\int cos(x)dx = sen(x) + C \qquad \int sen(x) = -cos(x) + C.$$

5) Utilizando los resultados de los ejercicios 8.2.1 y 8.3.1 se obtiene por ejemplo que:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + C \qquad \int sec(x)tg(x)dx = sec(x) + C.$$

El TFCI es una consecuencia del siguiente teorema, en el cual la hipótesis sobre f es sólo la integrabilidad.

Teorema 10.3.6 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y sea F la función definida para cada $x \in [a, b]$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

En estas condiciones se tiene que:

1) F es continua en $[a, b]$.
2) Si f es continua en $c \in (a, b)$ se verifica que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

En las aplicaciones resulta útil es siguiente corolario que es una consecuencia del TFCI y de la regla de la cadena.

Corolario 10.3.7 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sean g y h dos funciones derivables en un punto x_0 tal que $g(x_0), h(x_0) \in (a,b)$. Entonces la función*

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

es derivable en x_0 y dicha derivada es

$$F'(x_0) = f(g(x_0))g'(x_0) - f(h(x_0))h'(x_0).$$

Ejemplos 10.3.8 *1) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por*

$$a_n = \int_0^{1/n} f(t)dt.$$

Como la función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ es continua y la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, entonces la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$.

2) Calculamos la derivada de la función

$$F(x) = \int_{-1}^{sen(x)} tsen^2(t)dt.$$

Como $f(t) = tsen^2(t)$ es una función continua en toda la recta real, entonces, aplicando el teorema anterior:

$$F'(x) = sen(x)sen^2(sen(x))cos(x).$$

3) Calculamos la derivada de la función

$$F(x) = \int_{-x^2}^{ln(x^2+1)} t^2cos(3t-1)dt.$$

Como $f(t) = t^2cos(3t-1)$ es una función continua en toda la recta real, entonces, aplicando el corolario anterior:

$$F'(x) = (ln(x^2+1))^2cos(3ln(x^2+1)-1)\frac{2x}{x^2+1} - (-x^2)^2cos(3(-x^2)-1)(-2x) =$$

$$= (ln(x^2+1))^2cos(3ln(x^2+1)-1)\frac{2x}{x^2+1} + 2x^5cos(3x^2+1).$$

10.4 Técnicas básicas de integración

En esta sección repasaremos algunas técnicas básicas de integración, sin pretensión de ser exhaustivos, sólo mostrando técnicas esenciales que se deducen de los teoremas anteriores.

10.4.1 Integración por partes

La técnica de integración por partes se corresponde con la regla de derivación de un producto:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Proposición 10.4.1 (Integración por partes) *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en (a, b) con derivada continua. En estas condiciones:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Ejemplos 10.4.2 *1)* $\int_1^3 x^2 ln(x)dx$.

Tomamos $g(x) = ln(x)$ y $f'(x) = x^2$, entonces $f(x) = x^3/3$. De este modo usando integración por partes se tiene:

$$\int_1^3 x^2 ln(x)dx = f(3)g(3) - \int_1^3 \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx =$$

$$9ln(3) - \int_1^3 \frac{x^2}{3}dx = 9ln(3) - \frac{1}{3}(9 - \frac{1}{3}).$$

2) $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

3) $\int_0^1 arcsen(x)dx = arcsen(1) - 0 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$$\frac{\pi}{2} + \sqrt{1-1^2} - \sqrt{1-0^2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

4)

$$\int x^2 sen(x)dx = -x^2 cos(x) - \int 2x(-cos(x))dx = -x^2 cos(x) + 2\int xcos(x)dx =$$

$$= -x^2 cos(x) + 2(xsen(x) - \int sen(x)dx) = (2 - x^2)cos(x) + 2xsen(x) + C.$$

Ejercicios 10.4.1 *1) Verifica las siguientes igualdades:*
a) $\int e^x sen(x)dx = \frac{1}{2}[e^x sen(x) - e^x cos(x)] + C,$
b) $\int (x^2 - 3x + 2)e^x dx = (x^2 - 5x + 7)e^x + C,$
c) $\int 8x^3 arctan(x)dx = (2x^4 - 2)arctan(x) - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C.$
2) Encuentra una fórmula de recurrencia para la siguiente primitiva:

$$L_n = \int (1 - x^2)^n dx \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

10.4.2 Integración por cambio de variable

La técnica de integración por cambio de variable se corresponde con la regla de la cadena, para derivar la composición de dos funciones.

Proposición 10.4.3 (Integración por cambio de variable) *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivable con derivada continua en* $[a, b]$ *y* $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ *continua de modo que* $f([a, b]) \subseteq [c, d]$*. Entonces si* $t = f(x)$ *se tiene que:*

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt.$$

Ejemplos 10.4.4 *1)* $\int_0^2 x^3 cos(x^4 + 2)dx.$

Hacemos el cambio de variable $t = x^4 + 2$*. Entonces la integral se convierte en:*

$$\frac{1}{4}\int_2^{18} cos(t)dt = \frac{1}{4}(sen(18) - sen(2)).$$

2) $\int \sqrt{1 + x^2}x^5 dx.$

Hacemos el cambio de variable $t = 1 + x^2$*. Entonces la integral inicial se transforma en:*

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{x}(t^2 - 2t + 1)dt = \frac{1}{2}(\int t^{5/2}dt - 2\int t^{3/2}dt + \int t^{1/2}dt) =$$

$$\frac{1}{7}t^{7/2} - \frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{1}{3}t^{3/2} + C.$$

Y deshaciendo el cambio de variable se obtiene:

$$\frac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C.$$

3) $\int sen^2(3x)cos(3x)dx.$
Hacemos el cambio $t = sen(3x)$ *de modo que entonces la integral es:*

$$\int \frac{t^2}{3}dt = \frac{t^3}{9} + C = \frac{sen^3(3x)}{9} + C.$$

4) $\int_0^1 \frac{1}{(9-6x)^2}dx.$
Hacemos el cambio $t = 9 - 6x$ *y entonces:*

$$-\frac{1}{6}\int_9^3 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{6}\int_9^3 \frac{-dt}{t^2} =$$

$$\frac{1}{18} - \frac{1}{54}.$$

Observación 31 *Para* $n, m \in \mathbb{N}$, *sea*

$$I = \int sen^m(x)cos^n(x)dx.$$

El cálculo de este tipo de integral depente de la paridad de n *y* m *:*
Caso m impar: *se utiliza el cambio de variable* $t = cos(x)$.
Caso n impar: *se utiliza el cambio de variable* $t = sen(x)$.
Caso m y n pares: *se utilizan las fórmulas*

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}, \qquad sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}.$$

Sea ahora

$$I = \int R(sen(x), cos(x))dx,$$

donde $R(sen(x), cos(x))$ *es una función racional en seno y coseno (o una función racional de funciones trigonométricas reescritas en términos de senos y cosenos).*

Para calcular este tipo de integral distinguimos entre varios casos:
Caso R es impar en seno, *es decir,*

$$R(-sen(x), cos(x)) = -R(sen(x), cos(x)).$$

Se utiliza el cambio de variable $t = cos(x)$.

Caso R es impar en coseno, *es decir,*

$$R(sen(x), -cos(x)) = -R(sen(x), cos(x)).$$

Se utiliza el cambio de variable $t = sen(x)$.

Caso R es par en seno y coseno simultáneamente, *es decir,*

$$R(-sen(x), -cos(x)) = R(sen(x), cos(x)).$$

Se utiliza el cambio de variable $t = tan(x)$.

En el resto de los casos, se utiliza el cambio de variable $t = tan(\frac{x}{2})$, con

$$sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Ejercicio 10.4.1 *Calcula las siguientes integrales:*
a) $\int_0^1 \frac{e^{6x}}{e^{2x}+1}dx.$
b) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx.$
c) $\int \frac{sen^3(x)}{1+cos^2(x)}dx.$

10.4.3 Integrales racionales

También aportamos algunos ejemplos de integrales racionales, es decir integrales de cocientes de polinomios, donde la idea clave es descomponer la fracción en fracciones simples cuya derivada sea inmediata (o casi), obténiendose un logaritmo, una arcotangente o una potencia.

Ejemplos 10.4.5 *1)* $\int \frac{3}{x-2}dx = 3\int \frac{1}{x-2}dx = 3ln|x-2| + C.$
2) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = \int \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}dx.$
Podemos entonces descomponer en fracciones simples, esto es,

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Esta igualdad plantea una igualdad de polinomios y por tanto un sistema de ecuaciones, atendiendo a cada coeficiente de cada grado. Entonces:

$$A = 2 \qquad B = -1.$$

Por tanto nuestra integral es:

$$\int \frac{2}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx = 2ln|x-1| - ln|x+2| + C.$$

3) $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx.$
De nuevo descomponiendo en fracciones simples se tiene:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Lo que resolviendo la igualdad de polinomios da:

$$A = 1 \qquad B = 1 \qquad C = -1.$$

Por tanto nuestra integral es

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x-1}{x^2+4}dx =$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx =$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}ln(x^2+4) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}dx =$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}ln(x^2+4) - \frac{1}{2}arctg(x/2) + C.$$

4) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{(x-2)(x+3)}dx.$
Hacemos primero el cambio de variable $t = \sqrt{x-2}$ *de modo que la integral es ahora:*

$$\int \frac{2}{(t^2+5)}dt = \frac{2}{5}\int \frac{1}{(\frac{t^2}{5}+1)}dt = \frac{2}{\sqrt{5}}arctg(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5}}) + C.$$

Ejercicio 10.4.2 *Calcula las siguientes integrales:*
a) $\int \dfrac{2x^2-5x+6}{(x-1)^3}dx.$
b) $\int \dfrac{3x^2+8x-1}{x+2}dx.$
c) $\int \dfrac{cos(x)}{4-sen(x)}dx.$
d) $\int \dfrac{1}{x^2+x+1}dx.$
(Sugerencia: $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x^2+x+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+1} = \dfrac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$*)*

10.5 Integrales impropias

En esta sección se define una generalización del concepto de integral de Riemann: una integral es **impropia** si o bien el intervalo de integración es no acotado o bien la función que queremos integrar es no acotada.

10.5.1 Integrales impropias de primera especie

Un integral es **impropia de primera especie** si el intervalo de integración es un intervalo no acotado, es decir, del tipo $(-\infty, a)$, (a, ∞), o $(-\infty, \infty)$. Si la función $f(x)$ es integrable en todo subintervalo acotado del intervalo de integración, entonces su integral impropia se define por medio de un paso al límite. La convergencia de esta integral impropia coincidirá con la existencia de este límite. Vamos a estudiar los distintos casos por medio de ejemplos.

Ejemplos 10.5.1 *1) La integral* $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx\,(p \in \mathbb{R})$ *es impropia de primera especie ya que el intervalo* $(1, \infty)$ *no es acotado.*
Si $c > 1$, *la función* $f(x) = \frac{1}{x^p}$ *es continua en todo intervalo de la forma* $[1, c]$. *Por definición, su integral impropia* $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ *converge si existe el límite (y es finito)*

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p}dx.$$

Si $p = 1$, *la integral es igual a* $ln(|c|)$ *y* $\lim_{c\to\infty} ln(|c|) = \infty$, *por tanto la integral impropia* $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ *diverge.*
Si $p \neq 1$,

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p}dx = \frac{c^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.$$

Entonces $\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p}dx$ *converge a* $\frac{1}{p-1}$ *si* $p > 1$ *y diverge a* ∞ *si* $p < 1$.

2) La integral $\int_{-\infty}^0 x\,e^x dx$ *es impropia de primera especie ya que el intervalo* $(-\infty, 0)$ *no es acotado. Si* $c < 0$, *la función* $f(x) = x\,e^x$ *es continua en* $[c, 0]$. *Por definición, su integral impropia* $\int_{-\infty}^0 x\,e^x dx$ *converge si existe finito el límite*

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 x\,e^x dx.$$

Ahora, integrando por partes,

$$\int_c^0 x\,e^x dx = 0 - c\,e^c - \int_c^0 e^x dx = -c\,e^c - 1 + e^c = (1-c)e^c - 1$$

y $\lim\limits_{c\to-\infty} \int_c^0 x\, e^x dx = \lim\limits_{c\to-\infty} (1-c)e^c - 1 = 0 - 1 = -1$, *donde hemos aplicado la regla de L'Hôpital a la forma indeterminada del tipo* $\infty \cdot 0$:

$$\lim_{c\to-\infty} (1-c)e^c = \lim_{c\to-\infty} \frac{1-c}{e^{-c}} = \lim_{c\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-c}} = \lim_{c\to-\infty} e^c = 0.$$

3) Consideremos ahora la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

En este caso se elige un número $c \in \mathbb{R}$ *y se escribe*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{c}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Luego se calculan las integrales impropias correspondientes a los intervalos $(-\infty, c)$ *y* (c, ∞). *Si estas dos integrales convergen a dos números reales, entonces la integral impropia inicial también converge y su valor es igual a la suma de esos dos números. Si una de las integrales de la suma diverge la integral impropia inicial también diverge. En nuestro ejemplo, sea* $c = 0$. *Entonces*

$$\lim_{c\to-\infty} \int_{-c}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c\to-\infty} (arctg(0) - arctg(c)) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

y

$$\lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c\to-\infty} (arctg(c) - arctg(0)) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

10.5.2 Integrales impropia de segunda especie

Un integral $\int_a^b f(x)dx$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es **impropia de segunda especie** si la función $f(x)$ no está acotada en el intervalo de integración $[a, b]$. También en este caso, la integral impropia se define por medio de un paso al límite. Como antes, la convergencia de esta integral impropia coincidirá con la existencia de este límite. Vamos a estudiar los varios casos por medio de ejemplos.

Ejemplos 10.5.2 *1) Sea $p \in \mathbb{R}$. Estudiemos la convergencia de la integral*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx :$$

si $p \leq 0$, la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ es continua en $[0,1]$ y la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$ es una integral de Riemann;
si $p > 0$, la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y la integral es impropia de segunda especie. En este caso se escribe

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^p} dx$$

y la convergencia de la integral impropia depende de la existencia del límite a la derecha del símbolo de igualdad.
Ahora, si $p = 1$,

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \to 0^+} ln(|1|) - ln(|c|) = \infty$$

y la integral diverge.
Si $p > 0$ y $p \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{c \to 0^+} \frac{1}{-p+1} - \frac{c^{-p+1}}{-p+1}.$$

El último límite es igual a $\frac{1}{1-p}$ si $1 - p > 0$ y es igual a ∞ si $1 - p < 0$. Se sigue que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \infty & si \quad p \geq 1, \\ \frac{1}{1-p} & si \quad p < 1. \end{cases}$$

2) La integral $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(-x)}} dx$ es impropia de segunda especie ya que la función $f(x) = \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(-x)}}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$. En este caso se escribe

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(-x)}} dx = \lim_{c \to 0^-} \int_{-\frac{\pi}{4}}^c \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(-x)}} dx.$$

Usando el cambio de variable $t = \sqrt{sen(-x)}$, $\quad \frac{dt}{dx} = \frac{-cos(-x)}{2\sqrt{sen(-x)}} = \frac{-cos(x)}{2\sqrt{sen(-x)}}$, se tiene que

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^c \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(-x)}} dx = \int_{\sqrt{sen(\frac{\pi}{4})}}^{\sqrt{sen(-c)}} -2dt =$$

$$= -2(\sqrt{sen(-c)} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}) = -2(\sqrt{sen(-c)} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}).$$

Se sigue que

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(-x)}}dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{c} \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(-x)}}dx =$$

$$= \lim_{c\to 0^-} -2(\sqrt{sen(-c)} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = 2\frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

3) La integral $\int_0^2 \frac{x-3}{2x-3}dx$ *es una integral impropia de segunda especie ya que la función* $f(x) = \frac{x-3}{2x-3}$ *tiene una asíntota vertical en* $x = \frac{3}{2}$*. El punto* $x = \frac{3}{2}$ *es un punto interior del intervalo* $[0, 2]$ *y se escribe*

$$\int_0^2 \frac{x-3}{2x-3}dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x-3}{2x-3}dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{x-3}{2x-3}dx =$$

$$= \lim_{c\to \frac{3}{2}^-} \int_0^c \frac{x-3}{2x-3}dx + \lim_{d\to \frac{3}{2}^+} \int_d^2 \frac{x-3}{2x-3}dx.$$

Ahora,

$$\lim_{c\to \frac{3}{2}^-} \int_0^c \frac{x-3}{2x-3}dx = \lim_{c\to \frac{3}{2}^-} \frac{1}{2}\int_0^c \frac{2x-6}{2x-3}dx =$$

$$= \lim_{c\to \frac{3}{2}^-} \frac{1}{2}\int_0^c 1 - \frac{3}{2x-3}dx = \lim_{c\to \frac{3}{2}^-} \frac{c}{2} - \frac{3}{4}[ln(|2c-3|) - ln(|-3|)] = \infty.$$

Por tanto, la integral $\int_0^2 \frac{x-3}{2x-3}dx$ *diverge.*

10.5.3 Integrales impropias de tercera especie

Una integral es **impropia de tercera especie** si la función $f(x)$ no está acotada en un intervalo de integración no acotado. Para estudiar la convergencia de una integral impropia de tercera especie se utilizan las técnicas vistas para integrales de primera y segunda especie, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.5.3 *La integral* $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ *es de tercera especie: el intervalo* $(0,\infty)$ *no está acotado y la función* $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ *tiene una asíntota vertical en* $x = 0$. *Para calcular esta integral se escribe*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx + \lim_{d\to\infty} \int_1^d \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$$

Las integrales del lado derecho de la igualdad son integrales impropias de segunda especie. La integral inicial es convergente si y sólo si ambas integrales del segundo miembro de la igualdad son convergentes.

Apéndice A

Repaso de funciones elementales

Esta apéndice es una adaptación del capítulo 3 de [GG] y es un repaso de las funciones elementales y algunas de sus propiedades.

A.1 Funciones potencia, polinómica y racional

A.1.1 Función potencia

La **función potencia** es la función $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$dom(f) = \mathbb{R}, \qquad Im(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad n \quad \text{es impar}, \\ \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & \text{si} \quad n \quad \text{es par y} \quad n > 0, \\ \{1\} & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

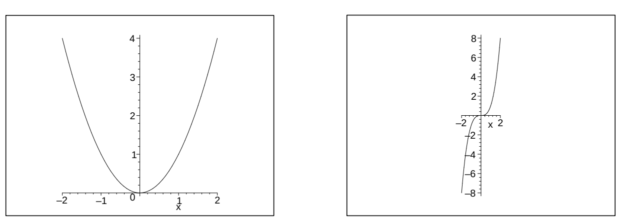

Figura A.1: Gráficas de x^2 y x^3

A.1.2 Polinomios

Un **polinomio real de grado** n es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\quad \forall i = 0 \cdots n$, $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = \text{depende de } a_n \text{ y } n.$$

Una recta $f(x) = ax + b$ es un polinomio de grado 1 y una parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ es un polinomio de grado 2.

A.1.3 Funciones racionales

Una **función racional** es el cociente de dos polinomios reales $P(x)$ y $Q(x)$: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

$dom(f) = \mathbb{R}$ menos las raíces reales de $Q(x)$ y
la $Im(f)$ no se puede determinar a priori.

Las funciones del tipo $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}^-$ son funciones racionales con $P(x) = 1$ y $Q(x) = x^{-n}$. Por ejemplo, $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

A.1.4 Descomposición en fracciones simples

El **teorema fundamental del álgebra** dice que un polinomio con coeficientes complejos de grado n tiene n raíces en el cuerpo de los números complejos (otra forma de enunciarlo es decir que el cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado).

En particular, un polinomio real $f(x)$ de grado n tiene n raíces en el cuerpo de los números complejos.

Esta propiedad nos permite descomponer una función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en una suma de fracciones más simples. Estas descomposiciones facilitan, por ejemplo, el cálculo de integrales de funciones racionales.

Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen una (o más) raíz a en común, entonces existen dos polinomio $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ tales que $P(x) = (x-a)P_1(x)$ y $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$. En este caso podemos simplificar la función $f(x)$ como $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es tal que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen raíces comunes, es decir, son coprimos.

Ejemplo A.1.1 *Sea*

$$f(x) = \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{2x^2 - 2x - 4} = \frac{3(x - \frac{1}{3})(x-2)(x-1)}{2(x-2)(x+1)} \overset{(x \neq 2)}{=} \frac{3(x - \frac{1}{3})(x-1)}{2(x+1)}$$

Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$, existen dos polinomios $A(x)$ y $R(x)$ (que se obtienen dividiendo $P(x)$ por $Q(x)$) tales que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{con} \quad grado(R(x)) < grado(Q(x)).$$

Ejemplo A.1.2 *En el ejemplo anterior, si $x \neq 2$,*

$$f(x) = \frac{3(x - \frac{1}{3})(x-1)}{2(x+1)} = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x + 2} = (\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}) + \frac{4}{x+1}.$$

Podemos entonces limitarnos a considerar funciones racionales $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tales que $P(x)$ y $Q(x)$ son coprimos, $grado(P(x)) < grado(Q(x))$ y $Q(x)$ tiene coeficiente de grado máximo igual a 1.

Sea $Q(x)$ de grado n y sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sus raíces complejas.

Vamos a ilustrar los posibles casos por medio de ejemplos:

Caso 1: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son todas reales y distintas.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)}.$$

En este caso determinamos dos constantes A y B tales que

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)}.$$

Entonces tiene que ser $x = (A+B)x - (2A+B)$, es decir

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = -2A = 2. \end{cases}$$

Por tanto, $f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2}$.

Caso 2: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son todas reales pero hay algunas con multiplicidad mayor que 1.

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^3}.$$

En este caso determinamos tres constantes A, B y C tales que

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2 + (-2A+B)x + (C-B+A)}{(x-1)^3}.$$

Entonces tiene que ser $x = Ax^2 + (-2A+B)x + (C-B+A)$, es decir,

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ -2A + B = 1 \\ C - B + A = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 1. \end{array}\right.$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^3}$.

Caso 3: hay raíces complejas, todas con multiplicidad 1.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}.$$

En este caso las raíces complejas son i y $-i$ y determinamos tres constantes A, B y C tales que

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Entonces tiene que ser $1 = (A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)$, es decir,

$$\left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ C - B = 0 \\ A - C = 1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} C = -\frac{1}{2} \\ B = C = -\frac{1}{2} \\ A = C + 1 = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{x+1}{2(x^2+1)}$.

Caso 4: hay raíces complejas con multiplicidad mayor que 1.

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}.$$

En este caso las raíces complejas $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$ tienen multiplicidad 2. Determinamos seis constantes A, B, C, D, E, y F tales que

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}.$$

Operando como usual, se obtiene un sistema determinado de seis ecuaciones en seis incógnitas cuya solución son los valores de la seis constantes buscadas.

Nota: en todos los casos, el número de constantes que tenemos que determinar es igual al grado del polinomio $Q(x)$.

A.2 Funciones exponenciales y logarítmicas

A.2.1 Función exponencial

Una **función exponencial** es una función $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo.

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \text{si} \quad a \neq 1, \\ \{1\} & \text{si} \quad a = 1. \end{cases}$$

Propiedades:

1) $a^0 = 1$,
2) para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $a^x\, a^y = a^{x+y}$,
3) para todo $x \in \mathbb{R}$, $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

A.2.2 Función logarítmica

Una **función logarítmica de base** $a > 0$ es una función $f(x) = log_a(x)$, donde a es un número real positivo distinto de 1. Es la función inversa de la función exponencial a^x.

$$dom(f) = \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad Im(f) = \mathbb{R}.$$

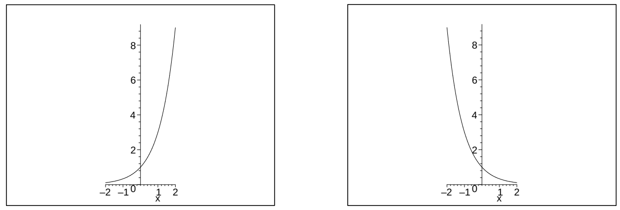

Figura A.2: Gráficas de 3^x y 3^{-x}

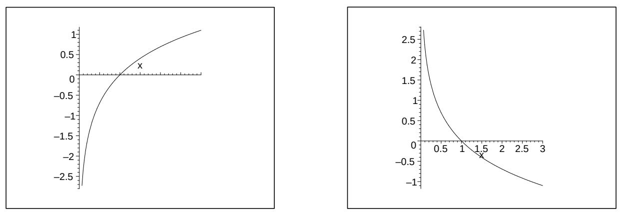

Figura A.3: Gráficas de $ln(x)$ y $ln_{\frac{1}{e}}(x)$

Si $a = e$ el logarítmo se llama neperiano y se representa como $ln(x)$.
Si $a = 10$ el logarítmo se llama decimal.

Propiedades:

1) $log_a(1) = 0$,
2) para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se verifica que

$$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y) \quad \text{y} \quad log_a(x^y) = ylog_a(x).$$

Entonces, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se verifica que $log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$.
3) para todo $x \in \mathbb{R}^+$ se verifica que

$$log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)} \quad \text{y} \quad a^x = b^{xlog_b(a)}.$$

A.3 Funciones trigonométricas y sus inversas

A.3.1 Seno y arcoseno

La función **seno de un ángulo** x **(en radianes)**, $f(x) = sen(x)$, es la ordenada del punto P de la circunferencia unitaria tal que el segmento OP

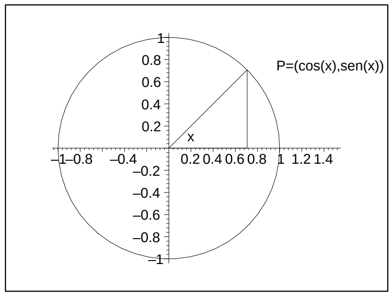

Figura A.4: Puntos de la circunferencia unitaria (x en radianes)

forma un ángulo x con el eje de las abscisas. Es una función periódica de período 2π. (Ver figuras A.4 y A.5.)

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = [-1, 1].$$

La función **arcoseno,** $f(x) = arcsen(x)$, es la inversa de la función biyectiva que se obtiene al considerar la función $sen(x)$ con dominio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Entonces (ver figura A.5),

$$dom(f) = [-1, 1] \quad \text{y} \quad Im(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

A.3.2 Coseno y arcocoseno

La función **coseno de un ángulo** x **(en radianes),** $f(x) = cos(x)$, es la abscisa del punto P de la circunferencia unitaria tal que el segmento OP forma un ángulo x con el eje de las abscisas. Es una función periódica de período 2π. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $cos(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$. (Ver figuras A.4 y A.6.)

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = [-1, 1].$$

La función **arcocoseno,** $f(x) = arccos(x)$, es la inversa de la función biyectiva que se obtiene al considerar la función $cos(x)$ con dominio $[0, \pi]$. Entonces (ver figura A.6),

$$dom(f) = [-1, 1] \quad \text{y} \quad Im(f) = [0, \pi].$$

A.3.3 Tangente y arcotangente

La función **tangente** esta definida por $f(x) = tan(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$. Por tanto, es periódica de período π (ver figura A.7) y

$$dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad Im(f) = \mathbb{R}.$$

La función **arcotangente,** $f(x) = arctan(x)$, es la inversa de la función biyectiva que se obtiene al considerar la función $tan(x)$ con dominio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Entonces (ver figura A.7),

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

A.3.4 Cosecante y arcocosecante

La función **cosecante,** es la función $f(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$. Es una función periódica de período 2π. (Ver figura A.8.)

$$dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

La función **arcocosecante,** $f(x) = arccosec(x)$, es la inversa de la función biyectiva que se obtiene al considerar la función $cosec(x)$ con dominio $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$. Entonces (ver figura A.8),

$$dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \quad \text{y} \quad Im(f) = [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}].$$

A.3.5 Secante y arcosecante

La función **secante,** es la función $f(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$. Es una función periódica de período 2π. (Ver figura A.9.)

$$dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

La función **arcosecante,** $f(x) = arcsec(x)$, es la inversa de la función biyectiva que se obtiene al considerar la función $sec(x)$ con dominio $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Entonces (ver figura A.9),

$$dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \quad \text{y} \quad Im(f) = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi].$$

A.3.6 Cotangente y arcocotangente

La función **cotangente,** es la función $f(x) = \dfrac{1}{tan(x)}$. Es una función periódica de período π. (Ver figura A.10.)

$$dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad Im(f) = \mathbb{R}.$$

La función **arcocotangente,** $f(x) = arccotan(x)$, es la inversa de la función biyectiva que se obtiene al considerar la función $cotan(x)$ con dominio $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$. Entonces (ver figura A.10),

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}].$$

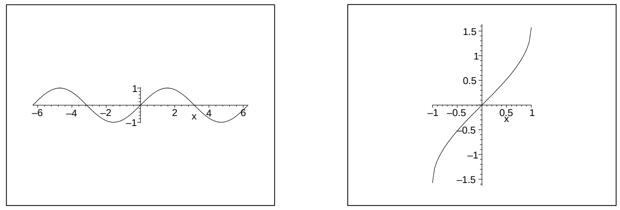

Figura A.5: Gráficas de $sen(x)$ y $arcsen(x)$

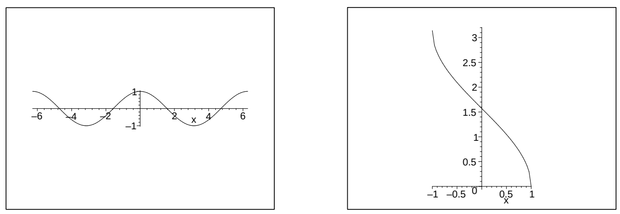

Figura A.6: Gráficas de $cos(x)$ y $arccos(x)$

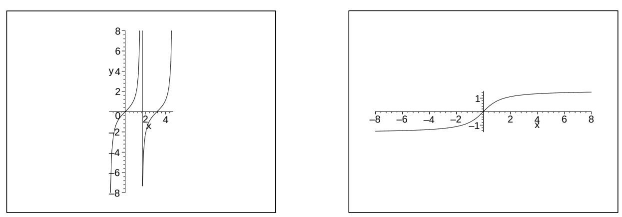

Figura A.7: Gráficas de $tan(x)$ y $arctan(x)$

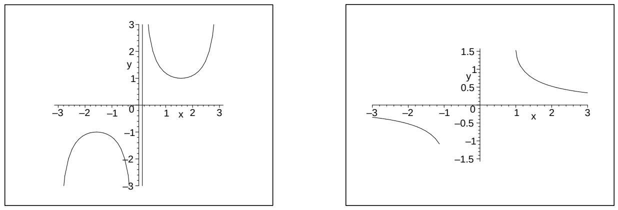

Figura A.8: Gráficas de $cosec(x)$ y $arccosec(x)$

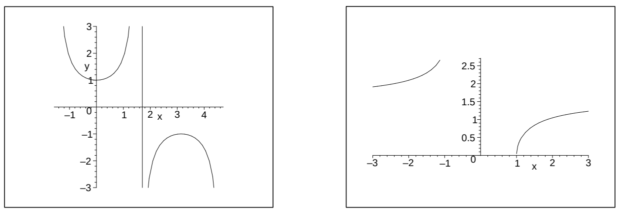

Figura A.9: Gráficas de $sec(x)$ y $arcsec(x)$

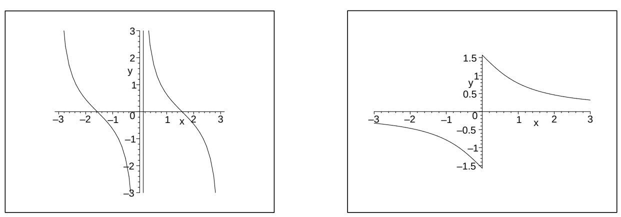

Figura A.10: Gráficas de $cot(x)$ y $arccot(x)$

A.4 Algunas relaciones trigonométricas

1. $sen^2(x) + cos^2(x) = 1,$
2. $sen(x + y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y),$
   $sen(2x) = 2sen(x)cos(x),$
3. $cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y),$
   $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x),$
4. $tan(x + y) = \dfrac{tan(x) + tan(y)}{1 - tan(x)tan(y)},$
   $tan(2x) = \dfrac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)},$
5. $sen(x) + sen(y) = 2sen(\dfrac{x+y}{2})cos(\dfrac{x-y}{2}),$
6. $cos(x) + cos(y) = 2cos(\dfrac{x+y}{2})cos(\dfrac{x-y}{2}),$
7. $cos(x) - cos(y) = -2sen(\dfrac{x+y}{2})sen(\dfrac{x-y}{2}),$
8. $sen^2(x) = \dfrac{1 - cos(2x)}{2}, \qquad cos^2(x) = \dfrac{1 + cos(2x)}{2},$
9. $sen^2(x) = \dfrac{tan^2(x)}{1 + tan^2(x)}, \qquad cos^2(x) = \dfrac{1}{1 + tan^2(x)},$
10. $sen(x) = \dfrac{2tan(\frac{x}{2})}{1 + tan^2(\frac{x}{2})}, \qquad cos(x) = \dfrac{1 - tan^2(\frac{x}{2})}{1 + tan^2(\frac{x}{2})}.$

A.5 Funciones hiperbólicas y sus inversas

A.5.1 Seno hiperbólico y argumento seno hiperbólico

La función **seno hiperbólico** es la función definida por $senh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (ver figura A.11).

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = \mathbb{R}.$$

La función **argumento seno hiperbólico,** $f(x) = argsh(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$, es la función inversa de $senh(x)$ (ver figura A.11).

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = \mathbb{R}.$$

A.5.2 Coseno hiperbólico y argumento coseno hiperbólico

La función **coseno hiperbólico** es la función definida por $cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (ver figura A.12).

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = \mathbb{R}.$$

La función **argumento coseno hiperbólico,** $f(x) = argch(x) = ln(x+\sqrt{x^2-1})$, es la función inversa de la función biyectiva que se obtiene al considerar la función $cosh(x)$ con dominio $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (ver figura A.12).

$$dom(f) = [1, \infty) \quad \text{y} \quad Im(f) = [0, \infty).$$

A.5.3 Tangente hiperbólica y argumento tangente hiperbólica

La función **tangente hiperbólica** es la función definida por

$$th(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

(ver figura A.13).

$$dom(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Im(f) = (-1, 1).$$

La función **argumento tangente hiperbólica,** $f(x) = argth(x) = ln(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}})$, es la función inversa de la función $th(x)$ (ver figura A.13).

$$dom(f) = (-1, 1) \quad \text{y} \quad Im(f) = \mathbb{R}.$$

Se pueden definir también las funciones **cosecante, secante y cotangente hiperbólicas:**

$$cosech(x) = \frac{1}{senh(x)} \quad sech(x) = \frac{1}{cosh(x)} \quad cotanh(x) = \frac{1}{tanh(x)}$$

y sus inversas.

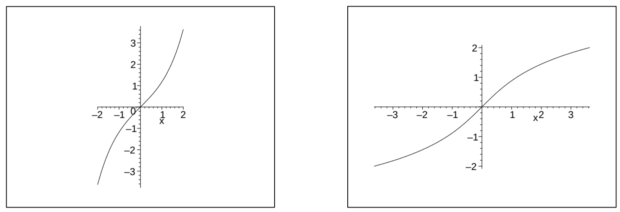

Figura A.11: Gráficas de $senh(x)$ y $argsenh(x)$

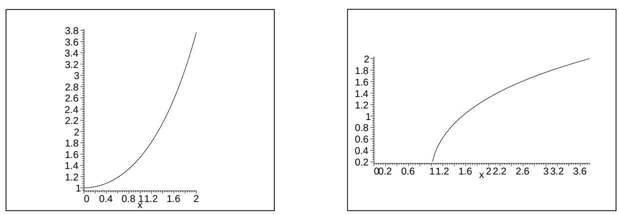

Figura A.12: Gráficas de $cosh(x)$ y $argcosh(x)$

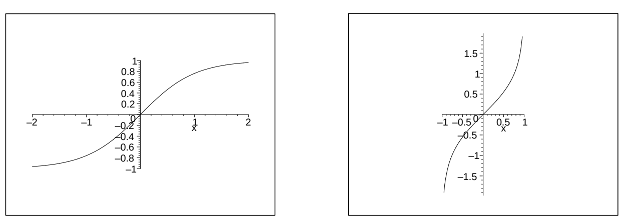

Figura A.13: Gráficas de $tanh(x)$ y $argtanh(x)$

A.5.4 Propiedades de las funciones hiperbólicas

1. $cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$,

2. $senh(x + y) = senh(x)cosh(y) + cosh(x)senh(y)$,
   $senh(2x) = 2senh(x)cosh(x)$,

3. $cosh(x + y) = cosh(x)cosh(y) + senh(x)senh(y)$,
   $cosh(2x) = cosh^2(x) + senh^2(x)$,

4. $tanh(x + y) = \dfrac{tanh(x) + tanh(y)}{1 + tanh(x)tanh(y)}$,
   $tanh(2x) = \dfrac{2tanh(x)}{1 + tanh^2(x)}$,

5. $senh(x) + senh(y) = 2senh(\dfrac{x + y}{2})cosh(\dfrac{x - y}{2})$,

6. $cosh(x) + cosh(y) = 2cosh(\dfrac{x + y}{2})cosh(\dfrac{x - y}{2})$,

7. $cosh(x) - cosh(y) = 2senh(\dfrac{x + y}{2})senh(\dfrac{x - y}{2})$,

8. $senh^2(x) = \dfrac{cosh(2x) - 1}{2}$, $\qquad cosh(x) = \sqrt{\dfrac{1 + cosh(2x)}{2}}$,

9. $senh^2(x) = \dfrac{tanh^2(x)}{1 - tanh^2(x)}$, $\qquad cosh(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - tanh^2(x)}}$.

Bibliografía

[A] T. J. Apostol, *Calculus,* vol. 1. Ed. Reverté, 1998.

[ABGM] J. Amillo, F. Ballesteros, R. Guadalupe, L. J. Martín, *Cálculo (Conceptos, Ejercicios y Sistemas de Computación Matemática).* Ed. McGraw-Hill, 1996.

[B] J. de Burgos Román, *Cálculo Infinitesimal de una Variable.* Ed. McGraw-Hill,1997.

[BS] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al análisis matemático de una variable.* Ed. Limusa (2^a Edición), 1996.

[BSm] G. L. Bradley y K. J.Smith, *Cálculo de una variable,* vol. 1. Ed.Prentice Hall, 1999.

[D] B. P. Demidóvich, *5000 problemas de análisis matemático.* Ed. Paraninfo, 1998.

[G] J. L. García Valle, *Matemáticas especiales para computación.* Ed. McGraw-Hill, 1988.

[GG] A. García,F. García, A. Gutiérrez,A. López, G. Rodríguez, A. de la Villa, *Cálculo I.* Ed. CLAGSA, 1993.

[LHE] R. E. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards, *Cálculo y Geometría Analítica,* vol. 1. Ed. McGraw-Hill, 1995.

[NPS] A.Ñevot, J. M. Poncela y J. Soler, *Apuntes y Problemas de Matemática Superior.* Ed. Taurus Universitaria, 1994.

[K] M. Krasnov et al., *Curso de matemáticas superiores para ingenieros,* vol. 1. Ed. Mir-Rubiños, 1994.

[P] D. Pestana, J.M. Rodríguez, E. Romera, E. Touris, V. Álvarez, A. Portilla, *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*, Editorial Ariel, 2000,

[S] J. Stewart, *Calculus.* Ed. Brooks/Cole Publishing Company, 1995.